$M=\begin{pmatrix}0{,}5 & -0{,}25 & 0{,}75\\ -1 & 1{,}5 & 0{,}5\\ -4 & -1 & 4\end{pmatrix}$ la matrice dans $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ d'un endomorphisme φ.

j'affirme que $M = PTP^{-1}$ avec $T=\begin{pmatrix}2&1&3\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$

$$P=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u_1 & u_2 & u_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix}1&0&-1\\0&2&0\\2&2&2\end{pmatrix} \end{array} \qquad P^{-1}=$$

1) donner l'image de $\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$ de deux façons différentes

2) idem avec $\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$

① posons $\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$ Méthode 1

$$M\vec{V}=\begin{pmatrix}0{,}5 & -0{,}25 & 0{,}75\\ -1 & 1{,}5 & 0{,}5\\ -4 & -1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}3\\4\\10\end{pmatrix}}$$

Méthode 2

on remarque que $\vec{v}=u_1+u_2$ donc $\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ dans la base (u_1,u_2,u_3)

or T est la matrice de φ dans la base (u_1,u_2,u_3)

Ainsi $\varphi(\vec{v})=T\vec{V}=\begin{pmatrix}2&1&3\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}$ donc $\varphi(\vec{v})$ a pour coordonnées $(3,2,0)$ dans la base (u_1,u_2,u_3)

donc $\varphi(\vec{v})=3u_1+2u_2=3\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\\10\end{pmatrix}$

Remarque : l'intérêt de la méthode 2 n'est pas flagrant ici, on peut dire que la méthode 2 nous a évité de manipuler des décimales.

L'intérêt théorique c'est qu'habituellement la matrice T est plus simple que M (typiquement elle est diagonale ou de Jordan).

Par contre, ici, le fait de voir que $\vec{v}=\vec{u}_1+\vec{u}_2$ était un coup de chance.

② posons $\vec{w}=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$ on a $\vec{w}=u_1-u_2$ donc $\varphi(\vec{w})=T\times\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$

donc $\varphi(\vec{w})=1\times\vec{u}_1-2\times\vec{u}_2=1\times\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}-2\times\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-4\\-2\end{pmatrix}$

On vérifie par $M\vec{W}=\begin{pmatrix}0{,}5 & -0{,}25 & 0{,}75\\ -1 & 1{,}5 & 0{,}5\\ -4 & -1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-4\\-2\end{pmatrix}$