on pose $A = \begin{pmatrix} 3{,}75 & 0{,}125 & 0{,}25 \\ -0{,}5 & 2{,}25 & 0{,}5 \\ 1 & 0{,}5 & 3 \end{pmatrix}$ la matrice de $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dans la base canonique

$\Delta = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 4{,}25 & -1{,}375 & 0{,}875 \\ 0{,}5 & 2{,}25 & 0{,}75 \\ 1 & -0{,}5 & 2{,}5 \end{pmatrix}$ $P' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

on admet que $A = P\Delta P^{-1} = P'BP'^{-1}$

① Calculer $\varphi\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ de deux manières (utiliser P')

et ② $\varphi\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ de deux manières (utiliser P)

① directement $\varphi\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\times 3{,}75+0{,}25+0{,}25 \\ -1{,}5+4{,}5+0{,}5 \\ 3+1+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}25 \\ 0{,}5 \\ 3 \end{pmatrix}$

avec P' on remarque que $\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{dans la base canonique}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base donnée par P'

donc $\varphi\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}75 \\ 3{,}5 \\ 3 \end{pmatrix} = 3{,}75\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 3{,}5\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}25 \\ 0{,}5 \\ 3 \end{pmatrix}$

② directement $\varphi\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix}$

avec P on remarque que $\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\text{dans la base canonique}} = u_1+u_2+u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base donnée par P

donc $\varphi\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \Delta\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix}$

cet exercice pour montrer que PAP^{-1} représente, dans la base donnée par P, l'endomorphisme que A représente dans la base canonique.