Un exercice de diagonalisation

$\boxed{\text{Diagonaliser } M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -0,6 & 3,8 & -1,2 \\ -1,4 & 2,2 & -0,8 \end{pmatrix}}$, puis calculer M^2 de deux manières différentes.

Réponse : $M = P\,\Delta\,P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \dfrac{1}{20}\begin{pmatrix} 3 & -4 & 6 \\ -8 & 4 & 4 \\ -1 & 8 & -2 \end{pmatrix}$.

Première tentative pour calculer les valeurs propres

$$\phi_M(\lambda) = \det(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -2 \\ -0,6 & 3,8-\lambda & -1,2 \\ -1,4 & 2,2 & -0,8-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\underset{\substack{C_3 \leftarrow C_3 + C_2 \\ C_1 \leftarrow C_1 - \frac{1-\lambda}{2} C_2}}{=} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -0,6 - \frac{(1-\lambda)}{2}(3,8-\lambda) & 3,8-\lambda & 2,6-\lambda \\ -1,4 - (1-\lambda)\times 1,1 & 2,2 & 1,4-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2,5 + 2,4\lambda - 0,5\lambda^2 & 3,8-\lambda & 2,6-\lambda \\ -2,5 + 1,1\lambda & 2,2 & 1,4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -2 \begin{vmatrix} -2,5 + 2,4\lambda - 0,5\lambda^2 & 2,6-\lambda \\ -2,5 + 1,1\lambda & 1,4-\lambda \end{vmatrix} \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{=} -2 \begin{vmatrix} 1,3\lambda - 0,5\lambda^2 & 1,2 \\ -2,5 + 1,1\lambda & 1,4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -2\left((1,3\lambda - 0,5\lambda^2)(1,4-\lambda) - 1,2(-2,5 + 1,1\lambda)\right)$$

$$= -2(0,5\lambda^3 + 1,82\lambda - 2\lambda^2 + 3 - 1,32\lambda)$$

$$= -\lambda^3 + 4\lambda^2 - \lambda - 6$$

là il est difficile de conclure car on ne sait pas gérer les équations de degré 3

trois idées

on recommence avec d'autres combinaisons linéaires (cf page

on étudie $f(x) = -x^3 + 4x^2 - x - 6$

on trouve

x		x_1		x_2	
f	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

on a $x = \frac{4 \pm \sqrt{13}}{3}$ or $3 < \sqrt{13} < 4$

donc x_1 entre 0 et 1

x_2 entre 2 et 3

on calcule : $f(2) = 0$ et $f(3) = 0$

donc par chance on a déjà deux valeurs propres.

Reste à écrire $f(x) = \alpha(x - x_0)(x-2)(x-3)$

par identification on trouve alors la troisième valeur propre qui est -1

on cherche une racine évidente, $x = 1$ ne marche pas, on essaie $x = -1$ qui marche, voilà déjà une valeur propre (on aurait pu essayer $x = 2$)

on identifie ensuite

$-X^3 + 4X^2 - X - 6 = (X+1)(aX^2 + bX + c)$

on trouve $(X+1)(-X^2 + 5X - 6)$

calcul de Δ etc

on aboutit à $-1, 2, 3$ comme valeurs propres.

Seconde tentative pour les valeurs propres

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -0,6 & 3,8 & -1,2 \\ -1,4 & 2,2 & -0,8 \end{pmatrix}$$

diagonaliser M
puis calculer M^3
de deux façons

① Valeurs propres

$$\varphi_M(\lambda) = \det(M-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & -2 \\ -0,6 & 3,8-\lambda & -1,2 \\ -1,4 & 2,2 & -0,8-\lambda \end{pmatrix}$$

en fait $L_2 \leftarrow L_2 - \frac{3}{5}L_1$
$L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{2}(-0,8-\lambda)L_1$

$$= \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & -2 \\ -1,2+0,6\lambda & 2,6-\lambda & 0 \\ \nearrow & 1,4-\lambda & 0 \end{pmatrix}$$

$-1,4+\frac{1}{2}(-0,8-\lambda)(1-\lambda)$

$$= -2\times\left((-1,2+0,6\lambda)(1,4-\lambda) - (2,6-\lambda)\left(-\frac{1,4}{1} - (0,4+\frac{\lambda}{2})(1-\lambda)\right)\right)$$

$$= -2\left(0,6(\lambda-2)(1,4-\lambda) - (2,6-\lambda)\left(-1,4-0,4-\frac{\lambda}{2}+\frac{\lambda^2}{2}+0,4\lambda\right)\right)$$

$$= -2\left(0,6(\lambda-2)(1,4-\lambda) - (2,6-\lambda)(-1,8-0,1\lambda+0,5\lambda^2)\right)$$

$$= -2\left(0,6(\lambda-2)(1,4-\lambda) - (2,6-\lambda)\times(-0,5)(\lambda^2+0,2\lambda+3,6)\right)$$

$$= -1,2(\lambda-2)(1,4-\lambda) \pm (2,6-\lambda)(\lambda^2+0,2\lambda+3,6)$$

$\Delta = 0,04 + 14,4 = 14,44 = 3,8^2$

$\frac{-0,2 \pm 3,8}{-2}$

$0,1 \pm 1,9$
2 ou $-1,8$

$$= -1,2\underbrace{(\lambda-2)}_{\text{yes}}(1,4-\lambda) \pm (2,6-\lambda)(-1)\underbrace{(\lambda-2)}_{\text{yes}}(\lambda+1,8)$$

$$= (\lambda-2)\left[-1,68+1,2\lambda \pm \lambda^2+0,8\lambda+4,68\right]$$

$$= (\lambda-2)(-\lambda^2+2\lambda+3)$$

$$\boxed{Sp(M) = \{-1, 2, 3\}}$$

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -0{,}6 & 3{,}8 & -1{,}2 \\ -1{,}4 & 2{,}2 & -0{,}8 \end{pmatrix}$$

Espaces propres, P et inverse de P

VECTEURS PROPRES

Recherche de E_{-1}

rappel E_{-1} c'est le nom standard des sous espace propre associé à la valeur propre $\lambda=-1$

$$MX=-X \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-2z=-x \\ -0{,}6x+3{,}8y-1{,}2z=-y \\ -1{,}4x+2{,}2y-0{,}8z=-z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2y-2z=0 \\ -0{,}6x+4{,}8y-1{,}2z=0 \\ -1{,}4x+2{,}2y+0{,}2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z=0 \\ -x+8y-2z=0 \\ -7x+11y+z=0 \end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-2L_1 \\ L_3\leftarrow L_3+L_1}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+y-z=0 \\ -3x+6y=0 \\ -6x+12y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z=0 \\ x=2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=x+y=3y \\ x=2y \end{cases} \quad \text{donc } \boxed{E_{-1}=\text{vect}\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}}$$

Recherche de E_2

$$MX=2X \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-2z=2x \\ -0{,}6x+3{,}8y-1{,}2z=2y \\ -1{,}4x+2{,}2y-0{,}8z=2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+2y-2z=0 \\ -0{,}6x+1{,}8y-1{,}2z=0 \\ -1{,}4x+2{,}2y-2{,}8z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+2y-2z=0 \\ -x+3y-2z=0 \\ -7x+11y-14z=0 \end{cases}$$

$$MX=2X \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1 \\ L_3\leftarrow L_3-7L_1}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -x+2y-2z=0 \\ y=0 \\ -3y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2z \\ y=0 \end{cases} \qquad \boxed{E_2=\text{vect}\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}}$$

Recherche de E_3

$$MX=3X \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+2y-2z=0 \\ -3x+4y-6z=0 \\ -7x+11y-19z=0 \end{cases} \underset{\substack{L_1 \\ L_2\leftarrow L_2-2L_1 \\ L_3\leftarrow L_3-\frac{11}{2}L_1}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -2x+2y-2z=0 \\ x-2z=0 \\ 4x-8z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x+z=3z \\ x=2z \end{cases}$$

$$\boxed{E_3=\text{vect}\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}}$$

$$P=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ associée à } \Delta=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ donc } M=P\Delta P^{-1}$$

INVERSE DE P

Recherche de P^{-1}

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2\leftarrow 2L_2-L_1 \\ L_3\leftarrow 2L_3-3L_1}}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & -4 & -3 & 0 & 2 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -20 & 1 & -8 & 2 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 20 & -20 & 0 & 11 & -8 & 2 \\ 0 & 10 & 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -20 & 1 & -8 & 2 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 20 & 0 & 0 & 3 & -4 & 6 \\ 0 & 10 & 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -20 & 1 & -8 & 2 \end{array}\right)$$

en faisant $L_1\div 20$, $L_2\div 10$, $L_3\div(-20)$, on obtient P^{-1}

$$P^{-1}=\frac{1}{20}\begin{pmatrix} 3 & -4 & 6 \\ -8 & 4 & 4 \\ -1 & 8 & -2 \end{pmatrix}$$

pour ceux qui auraient préféré la méthode des cofacteurs, on a $\det P=-20$.

CALCUL DE M^2 DE DEUX FAÇONS

on a $M = P\Delta P^{-1}$:

$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \Delta^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

donc

$$M^2 = P\Delta^2 P^{-1}$$

$$P\Delta^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -8 & 18 \\ 1 & 0 & 27 \\ 3 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

$$(P\Delta^2)P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -8 & 18 \\ 1 & 0 & 27 \\ 3 & 4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ -8 & 4 & 4 \\ -1 & 8 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 52 & 104 & -56 \\ -24 & 212 & -48 \\ -32 & 76 & 16 \end{pmatrix} \times \left(\frac{1}{20}\right)$$

$$P\Delta^2 P^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 13 & 26 & -14 \\ -6 & 53 & -12 \\ -8 & 19 & 4 \end{pmatrix}$$

Calcul direct

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -0,6 & 3,8 & -1,2 \\ -1,4 & 2,2 & -0,8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -0,6 & 3,8 & -1,2 \\ -1,4 & 2,2 & -0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,6 & 5,2 & -2,8 \\ -1,2 & 10,6 & -2,4 \\ -1,6 & 3,8 & 8 \end{pmatrix}$$

c'est pareil

Calcul de M^2 de deux façons