Diagonalisation
cas d'une matrice 3x3
diagonalisable
avec seulement
deux valeurs propres

Diagonaliser $M = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 50 & -17 & 5 \\ 50 & -25 & 13 \end{pmatrix}$, puis établir l'expression de M^n en fonction de n.

Réponse : La recherche des valeurs propres est grandement facilitée par les deux 0 sur la matrice. On trouve $\lambda = 2$ de multiplicité 2 et $\lambda = -3$ de multiplicité 1. L'espace propre E_2 est le plan vectoriel d'éqution $10x - 5y + z = 0$, il y a donc une infinité de choix possibles pour les deux vecteurs à écrire dans la matrice P.

On trouve par exemple :

$M = P\,\Delta\,P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -10 & 5 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -10 & 5 & -1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 10 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$M = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 50 & -17 & 5 \\ 50 & -25 & 13 \end{pmatrix}$$

Attention au coefficient $\frac{1}{4}$!

écrire $I = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$!!

recherche des valeurs propres

on cherche à annuler

$$\begin{vmatrix} 8-4\lambda & 0 & 0 \\ 50 & -17-4\lambda & 5 \\ 50 & -25 & 13-4\lambda \end{vmatrix} = (8-4\lambda)\left[(-17-4\lambda)(13-4\lambda) - 5(-25)\right]$$

$$= 4(2-\lambda)(-221-52\lambda+68\lambda+16\lambda^2+125)$$

$$= 4(2-\lambda)(-96+16\lambda+16\lambda^2)$$

$$= 4(2-\lambda)\times 16\underbrace{(-6+\lambda+\lambda^2)}_{\text{on fait } \Delta \text{ puis } x_1=2 \text{ et } x_2=-3}$$

on trouve $S_p(M) = \{2,-3\}$

vu que $\Phi_M(\lambda) = k(\lambda-2)^2 \times (\lambda+3)^1$

on dit que $\begin{cases} 2 \text{ est de multiplicité } 2 \\ -3 \text{ est de multiplicité } 1 \end{cases}$

---

recherche des vecteurs propres

attention au $\frac{1}{4}$!

$MX = -3X \iff \begin{cases} 8x = -3x\times 4 \\ 50x - 17y + 5z = -3y\times 4 \\ 50x - 25y + 13z = -3z\times 4 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ -5y+5z = 0 \\ -25y+25z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=0 \\ y=z \end{cases}$ $E_{-3} = \text{vect}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$MX = 2X \iff \begin{cases} \cancel{8x = 2x\times 4} \\ 50x - 17y + 5z = 2y\times 4 \\ 50x - 25y + 13z = 2z\times 4 \end{cases} \iff \begin{cases} 50x - 25y + 5z = 0 \\ 50x - 25y + 5z = 0 \end{cases}$

E_2 = plan d'équation $10x - 5y + z = 0$

on peut choisir deux vecteurs libres de ce plan :

$E_2 = \text{vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

On a donc $M = P\Delta P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -10 & 5 \end{pmatrix}$ et $\Delta = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$P = \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}}_{E_{-3}} & \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -10 & 5 \end{matrix}}_{E_2} \end{pmatrix} \qquad \Delta = \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}}_{E_{-3}} & \underbrace{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{matrix}}_{E_2} \end{pmatrix}$$

calcul de P^{-1}

Calcul de P^{-1} : pour changer je vais faire les cofacteurs

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} 10 & -4 & -10 \\ -5 & 0 & +1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } \det P = -1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -4 \text{ donc } P^{-1} = \frac{1}{-4} \times \begin{pmatrix} 10 & -5 & 1 \\ -4 & 0 & 0 \\ -10 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcul de M^n : on a $M^n = P\Delta^n P^{-1}$ avec $\Delta^n = \begin{pmatrix} (-3)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$

$$\begin{matrix} & & \begin{pmatrix} (-3)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \\ P\Delta^n = & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -10 & 5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 2^n & 0 \\ (-3)^n & 0 & 2^n \\ (-3)^n & -10.2^n & 5.2^n \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & -5 & 1 \\ -4 & 0 & 0 \\ -10 & 1 & -1 \end{pmatrix} \times 1/(-4)$$

$$M^n = P\Delta^n P^{-1} = (P\Delta^n)P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2^n & 0 \\ (-3)^n & 0 & 2^n \\ (-3)^n & 10\times 2^n & 5\times 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ \frac{-10}{4}((-3)^n - 2^n) & \frac{5}{4}.(-3)^n - \frac{1}{4}.2^n & \frac{-1}{4}(-3)^n + \frac{1}{4}.2^n \\ \frac{-10}{4}((-3)^n - 4.2^n + 5.2^n) & \frac{+5}{4}.(-3)^n - \frac{5}{4}2^n & \frac{-1}{4}(-3)^n + \frac{5}{4}.2^n \end{pmatrix}$$

Calcul de M^n

en écrivant mieux :

$$M^n = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4.2^n & 0 & 0 \\ 10(2^n - (-3)^n) & 5(-3)^n - 2^n & -(-3)^n + 2^n \\ 10(2^n - (-3)^n) & 5(-3)^n - 5.2^n & -(-3)^n + 2^n + 5 \end{pmatrix}$$

On vérifie rapidement que $M^0 = I$ et $M^1 = M$