Enoncé : Soit A la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

1) Calculer le polynôme caractéristique de A.

2) En déduire la valeur de $\exp(tA)$

3) Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x_1'(t) = 2x_1(t) + x_3(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) - x_2(t) - x_3(t) \\ x_3'(t) = -x_1(t) + 2x_2(t) + 2x_3(t) \end{cases}$$

---

1) le polynôme caractéristique de A est : $P(X) = -X^3 + 3X^2 - 3X + 1$
$= (1-X)^3$.

2) Méthode 1 : $X^n = P(X)Q(X) + a_n X^2 + b_n X + c_n$

1 est racine triple $\Leftrightarrow P(1) = P'(1) = P''(1) = 0$

- $X^n = \underbrace{P(X)Q(X)}_{=0} + \underbrace{R(X)}_{}$ $\quad$ $\deg R = 2$ (de la forme $a_n X^2 + b_n X + c_n$)

- $nX^{n-1} = \underbrace{P'Q}_{=0} + \underbrace{PQ'}_{=0} + R'$

- $n(n-1)X^{n-2} = \underbrace{P''Q + P'Q'}_{=0} + \underbrace{P'Q' + PQ''}_{=0} + R''$

On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} 1^n = a_n + b_n + c_n \\ n 1^{n-1} = 2a_n + b_n \\ n(n-1) 1^{n-2} = 2a \end{cases} \iff \begin{cases} a_n + b_n + c_n = 1 \\ 2a_n + b_n = n \\ 2a_n = n(n-1) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a_n = \dfrac{n(n-1)}{2} \\ b_n = n - 2a = n - n(n-1) \\ \quad = n(2-n) \\ c_n = 1 - \left(\dfrac{n(n-1)}{2} + n(2-n) \right) \end{cases} \iff \begin{cases} a_n = \dfrac{n(n-1)}{2} \\ b_n = n(2-n) \\ c_n = 1 - \left(\dfrac{n(n-1)}{2} + \dfrac{2n(2-n)}{2} \right) \\ \quad = \dfrac{2+n^2-3n}{2} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a_n = \dfrac{n(n-1)}{2} \\ b_n = n(2-n) \\ c_n = \dfrac{2+n^2-3n}{2} \end{cases}$$

$A^n = a_n A^2 + b_n A + c_n I$.

On cherche maintenant l'expression de e^{tA}.

$$e^{tA} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} (tA)^n$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} \frac{n(n-1)\, t^n}{n!} A^2 + \sum_{n \geq 1} \frac{n(2-n)\, t^n}{n!} A + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} \frac{2+n^2-3n}{n!} t^n I.$$

on peut mettre $n \geq 2$

Premier terme : $\dfrac{n(n-1)}{n!} = \dfrac{(n-1)}{(n-1)!} = \dfrac{1}{(n-2)!}$

On pose $p = n-2$:

$$\frac{1}{2}\sum_{p\geq 0} \frac{1}{p!} t^{p+2} A^2 = \frac{t^2}{2}\left(\sum_{p\geq 2} \frac{1}{p!} t^p\right) A^2 = \frac{t^2}{2}\sum_{p\geq 2} \frac{1}{(p-2)!} t^{p-2} A^2.$$

$$\boxed{= \frac{t^2}{2} e^t A^2.} \quad (1)$$

Deuxième terme : $\dfrac{n(2-n)}{n!} = \dfrac{2-n}{(n-1)!} = \dfrac{1+1-n}{(n-1)!} = \dfrac{1}{(n-1)!} + \dfrac{1-n}{(n-1)!}$

$$= \frac{1}{(n-1)!} - \frac{n-1}{(n-1)!}$$

$n \geq 1$

$$= \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{(n-2)!}$$

donc $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n(2-n)}{n!} t^n A = \sum_{n\geq 2}\left(\frac{n(2-n)}{n!} t^n A\right) + \underbrace{tA}_{\text{pour } n=1.}$

$$= \sum_{n\geq 2}\left(\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{(n-2)!}\right) t^n A + tA.$$

On pose $p = n-1$ et $q = n-2$, on obtient :

$$t\sum_{p\geq 1} \frac{1}{p!} t^p A - t^2 \sum_{q\geq 0} \frac{1}{q!} t^q A + tA$$

$$= t\sum_{p\geq 0} \frac{1}{p!} t^p A - t^2 \sum_{q\geq 0} \frac{1}{q!} t^q A$$

$$= t e^t A - t^2 e^t A$$

$$\boxed{= (t-t^2) e^t A} \quad (2)$$

Troisième terme :

$$\frac{2+n^2-3}{n!} = \frac{2}{n!} - \frac{3}{(n-1)!} + \frac{n}{(n-1)!}$$

$$= \frac{2}{n!} - \frac{3}{(n-1)!} + \frac{(n-1)}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-1)!}$$

$$= \frac{2}{n!} - \frac{3}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!}$$

On obtient :

$$\frac{1}{2} \sum \frac{2}{n!} t^n I - \frac{1}{2} \sum \frac{3}{(n-1)!} t^n I + \frac{1}{2} \sum \frac{1}{(n-2)!} t^n I + \frac{1}{2} \sum \frac{1}{(n-1)!} t^n I$$

$$= \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} t^n I - \frac{3t}{2} \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} t^n I + \frac{t^2}{2} \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} t^n I + \frac{1t}{2} \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} t^n I.$$

$$= \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} t^n I \left(1 - \frac{3t}{2} + \frac{t^2}{2} + \frac{t}{2}\right)$$

$$= \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} t^n I \left(1 + \frac{t^2}{2} - t\right)$$

$$\boxed{= \left(1 + \frac{t^2}{2} - t\right) e^t I.}$$ 3

L'expression de e^{tA} est :

$$\boxed{e^{tA} = \frac{t^2}{2} e^t A^2 + (t-t^2) e^t A + \left(1+\frac{t^2}{2} - t\right) e^t I.}$$

On calcule A^2 on obtient :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

On veut maintenant exprimer e^{tA} sous forme de matrice.

① $\Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{3}{2}t^2 & t^2 & 2t^2 \\ t^2 & -\frac{t^2}{2} & 0 \\ -t^2 & t^2 & \frac{t^2}{2} \end{pmatrix} e^t$

② $\Rightarrow \begin{pmatrix} 2(t-t^2) & 0 & t-t^2 \\ t-t^2 & t^2-t & t^2-t \\ t^2-t & 2(t-t^2) & 2(t-t^2) \end{pmatrix} e^t$

③ $\Rightarrow \begin{pmatrix} 1+\frac{t^2}{2}-t & 0 & 0 \\ 0 & 1+\frac{t^2}{2}-t & 0 \\ 0 & 0 & 1+\frac{t^2}{2}-t \end{pmatrix} e^t$

$\frac{3t^2}{2}e^t + 2(t-t^2)e^t + (1+\frac{t^2}{2}-t)e^t$ $= t^{e^t} + e^t$	$t^2 e^t$ $t^2 e^t$	$2t^2 e^t + (t-t^2)e^t$ $t^2 e^t + t e^t$
$t^2 e^t + (t-t^2)e^t$ $= t e^t$	$-\frac{t^2}{2}e^t + (t^2-t)e^t + (1+\frac{t^2}{2}-t)e^t$ $= (t^2-2t+1)e^t$	$(t^2-t)e^t$ $(t^2-t)e^t$
$-t^2e^t + (t^2-t)e^t$ $= -te^t$	$t^2e^t + 2(t-t^2)e^t$ $= (-t^2+2t)e^t$	$\frac{t^2}{2}e^t + 2(t-t^2)e^t + (1+\frac{t^2}{2}-t)e^t$ $= (-t^2+t+1)e^t$

$$e^{tA} = e^t \begin{pmatrix} t+1 & t^2 & t^2+t \\ t & t^2-2t+1 & t^2-t \\ -t & -t^2+2t & -t^2+t+1 \end{pmatrix}$$

Méthode 2 : Toute matrice A peut s'écrire sous la forme $A = D + N$

avec $\left| \begin{array}{l} D \text{ diagonalisable} \\ N \text{ nilpotente} \end{array} \right.$ $DN = ND$

$(1-X)^3$ annule A. $(I - A)^3 = 0$

$I - A$ nilpotente

Posons $N = A - I_3$.

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} & \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}}_{N^2} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{N^3} \end{array}$$

On a $tA = tI + tN$ et comme tI et tN commutent, on a :

$$\begin{aligned} e^{tA} = e^{tI + tN} &= e^{tI} e^{tN} \\ &= e^t \left(I_3 + tN + \frac{t^2}{2} N^2 \right) \end{aligned}$$

On déduit que :

$$e^{tA} = e^t \begin{pmatrix} t+1 & t^2 & t^2+t \\ t & t^2-2t+1 & t^2-t \\ -t & -t^2+2t & -t^2+t+1 \end{pmatrix}$$

3) Résoudre le système :

$$\begin{cases} x_1'(t) = 2x_1(t) + x_3(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) - x_2(t) - x_3(t) \\ x_3'(t) = -x_1(t) + 2x_2(t) + 2x_3(t) \end{cases}$$

On note $X(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ et $X(0) = (\alpha, \beta, \gamma)$

$X(t) = e^{tA} . X(0)$

On obtient

$$\begin{cases} x_1(t) = \alpha(t+1)e^t + \beta t^2 e^t + \gamma(t^2+t)e^t \\ x_2(t) = \alpha t e^t + \beta(t^2 - 2t + 1)e^t + \gamma(t^2 - t)e^t \\ x_3(t) = \alpha t e^t + \beta(-t^2 + 2t)e^t + \gamma(-t^2 + t + 1)e^t \end{cases}$$