Calcul d'une matrice inverse

Exemple d'un calcul d'inverse par deux méthodes

$$A=\begin{pmatrix}3&2&1\\1&-1&1\\0&2&2\end{pmatrix}\qquad A^{-1}=\frac{1}{14}\begin{pmatrix}4&2&-3\\2&-6&2\\-2&6&5\end{pmatrix}$$

Méthode cofacteurs

sous déterminants
$$\begin{pmatrix}-4&2&2\\2&6&6\\3&2&-5\end{pmatrix}$$

signes
$$\begin{pmatrix}-4&-2&2\\-2&6&-6\\3&-2&-5\end{pmatrix}$$

transposée
$$\begin{pmatrix}-4&-2&3\\-2&6&-2\\2&-6&-5\end{pmatrix}$$
puis division par le det qui vaut -14.

$$\det A=\det_{L_1\leftarrow L_1-3L_2}\begin{pmatrix}0&5&-2\\1&-1&1\\0&2&2\end{pmatrix}=-1\left(2\times5-2\times(-2)\right)=-14$$

Méthode pivot

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}3&2&1&1&0&0\\1&-1&1&0&1&0\\0&2&2&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[L_1-3L_2]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&5&-2&1&-3&0\\1&-1&1&0&1&0\\0&2&2&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[L_1\leftrightarrow L_2]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&1&0&1&0\\0&5&-2&1&-3&0\\0&2&2&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[L_3\leftarrow 5L_3-2L_2]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&1&0&1&0\\0&5&-2&1&-3&0\\0&0&14&-2&6&5\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{L_1\leftarrow 14L_1-L_3\\ L_2\leftarrow 7L_2+L_3}]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}14&-14&0&2&8&-5\\0&35&0&5&-15&5\\0&0&14&-2&6&5\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[L_1\leftarrow 5L_1+2L_2]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}70&0&0&20&10&-15\\0&35&0&5&-15&5\\0&0&14&-2&6&5\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{L_1\leftarrow L_1/70\\ L_3\leftarrow L_3/14\\ L_2\leftarrow L_2/35}]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&2/7&1/7&-3/14\\0&1&0&1/7&-3/7&1/7\\0&0&1&-2/14&6/14&5/14\end{array}\right)$$

Trouver l'inverse de A par système

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ on résoud $\begin{cases} 3x+2y+z=a \\ x-y+z=b \\ 2y+2z=c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2y+\frac{c}{2}-y=a \\ x-y+\frac{c}{2}-y=b \\ z=\frac{c}{2}-y \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+y=a-\frac{c}{2} \\ x-2y=b-\frac{c}{2} \\ z=\frac{c}{2}-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(2y+b-\frac{c}{2})+y=a-\frac{c}{2} \\ x=2y+b-\frac{c}{2} \\ z=\frac{c}{2}-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7y=a+c-3b \\ x=\frac{1}{7}(2a+2c-6b)+\frac{1}{7}(7b-\frac{7c}{2}) \\ z=\frac{c}{2}-y \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{7}(a+c-3b) \\ x=\frac{1}{7}(2a+b-1{,}5c) \\ z=\frac{1}{7}(\frac{7c}{2})-\frac{1}{7}(a+c-3b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{7}(a+c-3b) \\ x=\frac{1}{7}(2a+b-1{,}5c) \\ z=\frac{1}{7}(-a+3b+\frac{5c}{2}) \end{cases}$

on a donc $\vec{X}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1{,}5 \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & +3 & 2{,}5 \end{pmatrix}}_{A^{-1}} \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

Trouver l'inverse de A par polynôme

indication : calculer $3A+4A^2-A^3$

on a $A^2 = \begin{pmatrix} 11 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ $A^3 = \begin{pmatrix} 39 & 30 & 31 \\ 11 & 3 & 11 \\ 8 & 14 & 16 \end{pmatrix}$

donc $3A+4A^2-A^3 = \begin{pmatrix} 14 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix} = 14\,I$;

en factorisant par A, on a alors :

$$A \times (3I+4A-A^2) = 14I$$

donc $A^{-1} = \frac{1}{14}(3I+4A-A^2) = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 2 & -6 & 2 \\ -2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

Remarque : dans la pratique, on ne calcule pas $3A+4A^2-A^3$, on utilise le théorème de Cayley Hamilton