EXEMPLE DE RÉDUCTION DE JORDAN

$$A=\begin{pmatrix}7&-3,5&4\\0&3&0\\-8&7,5&-5\end{pmatrix}$$

soit f l'endomorphisme associé

Recherche des valeurs propres

$$\varphi_A(\lambda)=\det\begin{pmatrix}7-\lambda&-3,5&4\\0&3-\lambda&0\\-8&7,5&-5-\lambda\end{pmatrix}=(3-\lambda)\begin{vmatrix}7-\lambda&4\\-8&-5-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)\left[(7-\lambda)(-5-\lambda)+32\right]$$

$\varphi_A(\lambda)=(3-\lambda)(\lambda^2-2\lambda-3)$ on trouve $Sp(f)=\{-1;3\}$

multiplicité 1 ; multiplicité 2

Recherche des vecteurs propres

$$AX=-X \iff \begin{cases}7x-3,5y+4z=-x\\3y=-y\\-8x+7,5y-5z=-z\end{cases}\iff\begin{cases}8x+4z=0\\y=0\\-8x-4z=0\end{cases}\iff\begin{cases}2x=-z\\y=0\end{cases}$$

$$E_{-1}=\text{vect}\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$AX=3X\iff\begin{cases}7x-3,5y+4z=3x\\\cancel{3y=3y}\\-8x+7,5y-5z=3z\end{cases}\iff\begin{cases}4x-3,5y+4z=0\\-8x+7,5y-8z=0\end{cases}\iff\begin{cases}y=0\\x=-z\end{cases}$$

$$E_3=\text{vect}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

$\dim E_{-1}+\dim E_3<3$, autrement dit $\dim E_3<$ multiplicité de 3

donc Jordan

Jordan

on prend la base (U_3, V, U_{-1}) avec $U_3=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $U_{-1}=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$

on veut que f dans cette base ait pour matrice $\Delta_J=\begin{pmatrix}3&1&0\\0&3&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ donc que $\Delta_J V=U_3+3V$

remarque : on aurait pu prendre $\Delta_J=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&3&1\\0&0&3\end{pmatrix}$

dans ce cas $P=\begin{pmatrix}-2&1&1\\0&0&2\\1&-1&1\end{pmatrix}$

(toujours avec $x=1$)

et $P'\begin{pmatrix}-1&1&-1\\-1&1,5&-2\\0&\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}$

Cela s'écrit $\begin{cases}7x-3,5y+4z=1+3x\\\cancel{3y=3y}\\-8x+7,5y-5z=-1+3z\end{cases}\iff\begin{cases}4x-3,5y+4z=1\\-8x+7,5y-8z=-1\end{cases}$

$\iff\begin{cases}y=2\\x+z=2\end{cases}$ c'est un plan affine, on peut prendre $V=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$

Conclusion $P=\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&2&0\\-1&1&1\end{pmatrix}$ on trouve $P^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1,5&-2\\0&0,5&0\\-1&1&-1\end{pmatrix}$ $\boxed{A=P\Delta_J P^{-1}}$