$A = \begin{pmatrix} -8 & 2 & -1 \\ -2 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$ on a établi $A = P \Delta_j P^{-1}$ avec $\Delta_j = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$

et $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

Trouver $A^m$

- $\Delta_j = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} = -6I + N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $N^2 = O_3$

$$(\Delta_j)^m = (-6I)^m + \binom{m}{1}(-6I)^{m-1}.N + 0\ldots$$

$$(\Delta_j)^m = (-6)^m I + m.(-6)^{m-1}.N = \begin{pmatrix} (-6)^m & 0 & 0 \\ 0 & (-6)^m & m.(-6)^{m-1} \\ 0 & 0 & (-6)^m \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

- $$(\Delta_j)^m.P^{-1} = \begin{pmatrix} (-6)^m & 0 & 0 \\ 0 & (-6)^m & m.(-6)^{m-1} \\ 0 & 0 & (-6)^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -(-6)^m & (-6)^m & 0 \\ (-6)^m - 2m(-6)^{m-1} & 2.m.(-6)^{m-1} & -m(-6)^{m-1} \\ -2(-6)^m & 2(-6)^m & -(-6)^m \end{pmatrix}$$

on va factoriser par $(-6)^{m-1}$

$$(\Delta_j)^m.P^{-1} = (-6)^{m-1} \times \begin{pmatrix} +6 & -6 & 0 \\ -6-2m & 2m & -m \\ 12 & -12 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & -6 & 0 \\ -6-2m & 2m & -m \\ 12 & -12 & 6 \end{pmatrix}$$

- $$P(\Delta_j)^m P^{-1} = (-6)^{m-1} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} -6-2m & 2m & -m \\ -2m & 2m-6 & -m \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}}_{\text{voici } A^m}$$

réponse

$$\boxed{A^m = \frac{(-6)^m}{6} \begin{pmatrix} 2m+6 & -2m & m \\ 2m & 6-2m & m \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}}$$

- Vérification : pour $m=0$ on a $A^0 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = I_3$ c'est bon

$A^1 = (-1)\begin{pmatrix} 8 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = A$ c'est bon