Une suite de vecteurs

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{4}(x_n + 7y_n + 13z_n) \\ y_{n+1} = x_n + y_n + z_n \\ z_{n+1} = \frac{1}{4}(3x_n - 3y_n - 9z_n) \end{cases} \quad \text{et } (x_0, y_0, z_0) = (1, -1, 0)$$

on écrit $\vec{X}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ alors $\vec{X}_{n+1} = A\vec{X}_n$ avec $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 7 & 13 \\ 4 & 4 & 4 \\ 3 & -3 & -9 \end{pmatrix}$

on détecte des vecteurs propres évidents

$u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (on peut détecter u_0 mais il est moins évident)

trace

$tr A = \frac{1+4-9}{4} = -1$ donc $-3 + 2 + ? = -1 \iff ? = 0$

recherche de u_0 par système : on trouve $u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

réduction de A

on a $A = P\Delta P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\Delta = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

méthode 1, recherche de P^{-1}

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \iff \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \iff \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \iff \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right)$$

$$P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Longleftarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/4 & -1/4 & -3/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & -1/4 & 1/4 \end{array}\right) \iff \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 3/4 & 1/4 & -1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & -1/4 & 1/4 \end{array}\right) \iff \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right)$$

calcul de A^n

$$A^n = P\begin{pmatrix} (-3)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} (-3)^n & 2^n & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ -(-3)^n & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} (-3)^n + 2^{n+1} & -(-3)^n + 2.2^n & (-3)(-3)^n + 2.2^n \\ 2.2^n & 2.2^n & 2.2^n \\ -(-3)^n & (-3)^n & 3.(-3)^n \end{pmatrix}$$

on peut factoriser

$$\boxed{A^n = \frac{1}{4}.2^n\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}(-3)^n\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}}$$

la formule n'est pas valable pour $n = 0$ car A^0 n'est pas définie car A non inversible conclusion

$$\vec{X}_n = A^n \vec{X}_0 = \frac{1}{4} \cdot 2^n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}(-3)^n \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{(-3)^n}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

formule valable pour $n \geq 1$

on vérifie pour $n = 1$

on a $X_1 = \frac{3}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Cayley Hamilton = méthode 2

on a $\phi_A(X) = X(X-2)(X+3)$

$$X^n = \phi_A(X) \cdot Q(X) + aX^2 + bX + c$$

on trouve
$$\begin{cases} 4a + 2b + c = 2^n \\ 9a - 3b + c = (-3)^n \\ c = 0 \quad \text{(ligne valable pour } n \geq 0 \text{ seulement)} \end{cases}$$

d'où
$$\begin{cases} 4a + 2b = 2^n \\ 9a - 3b = (-3)^n \\ c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2a + b = 2^{n-1} \\ \underbrace{3a - b = -(-3)^{n-1}}_{\text{j'ai divisé par 3}} \\ c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{2^{n-1} - (-3)^{n-1}}{5} \\ b = \frac{3 \cdot 2^{n-1} + 2(-3)^{n-1}}{5} \\ c = 0 \end{cases}$$

vrai pour $n \geq 1$

Conclusion méthode 2

$$A^n = \frac{2^{n-1} - (-3)^{n-1}}{5} A^2 + \frac{3 \cdot 2^{n-1} + 2(-3)^{n-1}}{5} A$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4{,}25 & -0{,}25 & -4{,}75 \\ 2 & 2 & 2 \\ -2{,}25 & 2{,}25 & 6{,}75 \end{pmatrix}$$

$$A^n = 2^{n-1}\left(\frac{A^2}{5} + \frac{3A}{5}\right) - (-3)^{n-1}\left(\frac{A^2}{5} - \frac{2A}{5}\right)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}25 & 1{,}75 & 3{,}25 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0{,}75 & -0{,}75 & -2{,}25 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \frac{2^{n-1}}{5}\begin{pmatrix} 5 & 5 & +5 \\ 5 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{(-3)^{n-1}}{5}\begin{pmatrix} 3{,}75 & -3{,}75 & -11{,}25 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3{,}75 & 3{,}75 & 11{,}25 \end{pmatrix}$$

$$A^n = 2^{n-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 & +1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{3}{4}(-3)^{n-1}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

c'est exactement la même chose que tout à l'heure