

Champs de vecteurs \mathbb{R}^3

TABLE DES MATIÈRES

1. $\vec{\text{rot}}, \vec{\text{grad}}, \text{div}, \Delta$	1
1.1. Exercices : champs de $\vec{\text{grad}}$ ou de $\vec{\text{rot}}$	1
2. CIRCULATIONS & GREEN RIEMANN	2
2.1. Exercices	2
2.2. Lien circulation-travail	7
3. FLUX & OSTROGRADSKY	7
3.1. Exercices	9
3.1.1. Petits exercices pédagogiques	9
3.1.2. Liens à explorer	9
3.1.3. Calculs de flux	?
3.1.4. Utilisation de Stokes	?
3.1.5. Utilisation d'Odstrogradsky	?
4. CHANGEMENTS DE VARIABLE ATYPIQUES	?
4.0.1. Coordonnées paraboloidales	?

1. $\vec{\text{rot}}, \vec{\text{grad}}, \text{div}, \Delta$

1.1. Exercices : champs de $\vec{\text{grad}}$ ou de $\vec{\text{rot}}$

Soient les champs suivants. sont-ils des champs de gradient, ou des champs de rotationnel ?

$\vec{A} = \begin{pmatrix} y^2 \sqrt{z} \\ 2y \sqrt{z} (x+1) \\ \frac{1}{2\sqrt{z}} (xy^2 + y^2) \end{pmatrix}$	$\vec{B} = \begin{pmatrix} xz - x \\ -yz \\ z - x \end{pmatrix}$	$\vec{C} = \begin{pmatrix} yz^3 \\ \frac{1}{2\sqrt{z^2+y}} + xz^3 \\ \frac{z}{\sqrt{z^2+y}} + 3xyz^2 \end{pmatrix}$	$\vec{D} = \begin{pmatrix} 3x^2 + y \\ x + z \\ y \end{pmatrix}$
---	--	---	--

1. Réponse : $\vec{\text{rot}} \vec{A} = \vec{0}$ puis l'on trouve $\vec{A} = \vec{\text{grad}} V$ avec $V(x, y, z) = (x+1)y^2 \sqrt{z}$.

2. Réponse : $\text{div} \vec{B} = 0$ puis l'on trouve $\vec{B} = \vec{\text{rot}} \vec{R}$ avec $\vec{R} = \begin{pmatrix} xy \\ xz \\ xyz \end{pmatrix}$.

3. Réponse : $\vec{C} = \vec{\text{grad}} V$ avec $V(x, y, z) = \sqrt{z^2+y} + xyz^3$.

4. Réponse : $\vec{D} = \vec{\text{grad}} V$ avec $V = (x^3 + xy + yz)$.

Pour \vec{A} et \vec{B} , voir fichier champs_a_b sur :

http://lemathoscope.com/LWS_FTP/MathoscopePrepa/dossier_champs_vecteurs.

2. CIRCULATIONS & GREEN RIEMANN

2.1. Exercices

1. Dans \mathbb{R}^2 , calculer de deux manières si possible :

a. $I = \int_C \vec{E} \cdot d\vec{M}$ avec C le cercle de centre $A\left(\frac{2}{1}\right)$ de rayon 2, orienté positivement, et $\vec{E} = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix}$.

Réponse : $\partial_x E_y = \partial_y E_x$ donc \vec{E} est conservatif.

* première méthode : $I=0$ puisque le circuit est fermé et le champ conservatif ;

* seconde méthode : en paramétrant le cercle, on retrouve $I=0$ par périodicité.

- détails (cliquer sur ◦)

$$C: \vec{M} \begin{cases} x = 2 + 2\cos t \\ y = 1 + 2\sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi] \text{ donc } d\vec{M} = \begin{pmatrix} -2\sin t dt \\ 2\cos t dt \end{pmatrix}.$$

$$I = \int_C \vec{E} \cdot d\vec{M} = \int_{t=0}^{2\pi} \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2\sin t dt \\ 2\cos t dt \end{pmatrix} = 2 \int_0^{2\pi} (-x^2 \sin t + y^2 \cos t) dt$$

$$I = 2 \int_0^{2\pi} (-4(1 + 2\cos t + \cos^2 t) \sin t + (1 + 4\sin t + 4\sin^2 t) \cos t) dt = 0 \text{ par périodicité.}$$

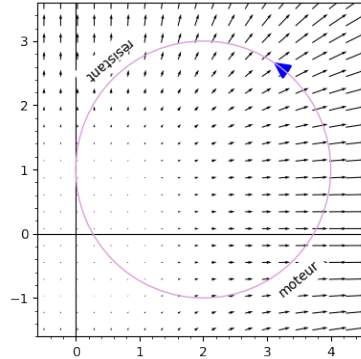


Figure 1.

b. Idem que le précédent mais sur le demi-cercle supérieur seulement (de $U(4, 1)$ vers $V(0, 1)$), parcouru positivement, donc de U vers V .

Réponse :

* on résoud $\vec{\text{grad}} \Phi = \vec{E} \Leftrightarrow \begin{cases} \partial_x \Phi = x^2 \\ \partial_y \Phi = y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \Phi(x, y) = \frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3}$.

$$\text{Alors, } I = \int_C \vec{E} \cdot d\vec{M} = \Phi(V) - \Phi(U) = \Phi(0, 1) - \Phi(4, 1) = \frac{1}{3} - \left(\frac{64}{3} + \frac{1}{3}\right) = -\frac{64}{3}.$$

* par paramétrage du demi-cercle.

- détails du calcul (cliquer sur ◦)

on repart du calcul précédent :

$$I = 2 \int_0^{\pi} (-4(1 + 2\cos t + \cos^2 t) \sin t + (1 + 4\sin t + 4\sin^2 t) \cos t) dt$$

$$I = 2 \left[4 \cos t + 4 \cos^2 t + \frac{4}{3} \cos^3 t + \sin t + 4 \sin^2 t + \frac{4}{3} \sin^3 t \right]_0^\pi$$

$$I = 2 \left[4(-2) + \frac{4}{3} \times (-2) \right]_0^\pi = -\frac{64}{3}$$

Pour les deux précédents, voir fichier travail1.ggb sur :
http://lemathoscope.com/LWS_FTP/MathoscopePrepa/
 (dossier champs_vecteurs).

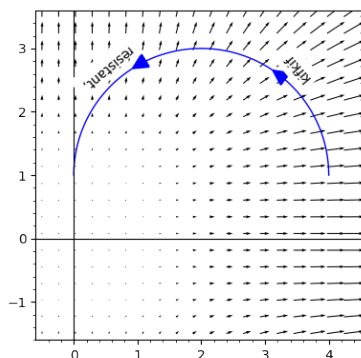


Figure 2.

c. $I = \int_C \vec{E} \cdot d\vec{M}$ où :

- $C = \begin{cases} x^2 + (y-1)^2 = 1 \\ y \geq 1 \end{cases}$ est le demi-cercle $A \rightarrow B$ parcouru de A vers B ;
- $A(-1; 1)$ et $B(1; 1)$;
- et le champ $\vec{E} = \begin{pmatrix} y^2 \\ x^2 \end{pmatrix}$.

Réponse : $\text{rot } \vec{E} \neq \vec{0}$ donc \vec{E} n'est pas un champ de gradients.

Green Riemann ne s'applique pas puisque la courbe n'est pas fermée.

Méthode directe : il faut paramétrer le demi-cercle par $C = \left\{ \begin{pmatrix} x = \cos t \\ y = 1 + \sin t \end{pmatrix}, t \text{ de } 0 \text{ à } \pi \right\}$.

On trouve $I = \frac{10}{3} + \pi$

- détail du calcul (cliquer sur ◦)

$$I = \int_C \vec{E} \cdot d\vec{M} = \int_0^\pi \begin{pmatrix} y^2 \\ x^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt = \int_0^\pi (-y^2 \sin t + x^2 \cos t) dt$$

$$I = \int_0^\pi (\cos^2 t \cos t - (1 + 2\sin t + \sin^2 t) \sin t) dt$$

$$I = \int_0^\pi ((1 - \sin^2 t) \cos t - (1 + 2\sin t + 1 - \cos^2 t) \sin t) dt$$

$$I = \int_0^\pi ((\cos t - \cos t \sin^2 t) - (2\sin t + 2\sin^2 t - \sin t \cos^2 t)) dt$$

$$I = \int_0^\pi (\cos t - \cos t \sin^2 t - 2\sin t - 2\sin^2 t + \sin t \cos^2 t) dt$$

$$I = \left[\sin t - \frac{\sin^3 t}{3} + 2 \cos t - 2 \left(\frac{t}{2} - \frac{1}{4} \sin(2t) \right) - \frac{\cos^3 t}{3} \right]_0^\pi \text{ car } 2\sin^2 x = 1 - \cos(2x)$$

$$I = \left[2 \cos t - t - \frac{\cos^3 t}{3} \right]_0^\pi = \left(2 - \frac{1}{3} \right) - \left(-2 - \pi - \frac{(-1)}{3} \right) = 2 - \frac{1}{3} + 2 + \pi + \frac{(-1)}{3}$$

$$\boxed{I = \frac{10}{3} + \pi}$$

Voir fichier travail2.ggb dans la dropbox

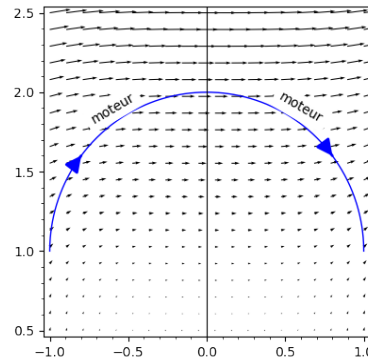


Figure 3.

d. $I = \int_C \vec{E} \cdot d\vec{M}$ où C est l'ellipse d'équation $(x-2)^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ et le champ $\vec{E} = \begin{pmatrix} xy \\ 1 \end{pmatrix}$.

Réponse : par Green-Riemann ou directement par paramétrage, on trouve $I = -4\pi$.

- Détails (cliquer sur ◦)

- Directement : $\vec{M} \begin{cases} x=2+\cos\theta \\ y=2\sin\theta \end{cases}$ d'où $d\vec{M} \begin{cases} x=-\sin\theta d\theta \\ y=2\cos\theta d\theta \end{cases}$ donc :

$$\begin{aligned} I &= \int_C \vec{E} \cdot d\vec{M} = \int_{\theta=0}^{2\pi} \begin{pmatrix} xy \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ 2\cos\theta \end{pmatrix} d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi} (-xy \sin\theta + 2\cos\theta) d\theta \\ &= \int_{\theta=0}^{2\pi} (-(2+\cos\theta)2\sin^2\theta + 2\cos\theta) d\theta \\ &= \int_{\theta=0}^{2\pi} (-4\sin^2\theta - 2\cos\theta \sin^2\theta + 2\cos\theta) d\theta \\ &= \left[-4 \left(\frac{\theta - \frac{1}{2} \sin(2\theta)}{2} \right) - 2 \frac{\sin^3\theta}{3} + 2 \sin\theta \right]_0^{2\pi} = [-2\theta]_0^{2\pi} = \boxed{-4\pi} \end{aligned}$$

- Par Green-Riemann :

$$I = \int_{C=\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{M} = \iint_S \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) dx dy = - \iint_S x dx dy,$$

or $(x-2)^2 + \frac{y^2}{4} = 1 \Leftrightarrow y = \pm 2\sqrt{1-(x-2)^2}$ d'où :

$$\begin{aligned} I &= - \int_{x=1}^3 \left(x \int_{y=-2\sqrt{1-(x-2)^2}}^{2\sqrt{1-(x-2)^2}} dy \right) dx \\ &= -4 \int_{x=1}^3 x \sqrt{1-(x-2)^2} dx \text{ posons } x=2+\sin\theta \\ &= -4 \int_{x=1}^3 (2+\sin\theta) \cos^2\theta d\theta = -4 \int_{x=1}^3 2\cos^2\theta d\theta \\ &= \boxed{-4\pi} \end{aligned}$$

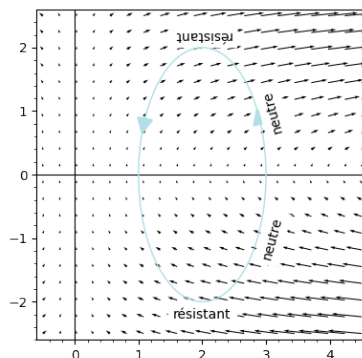


Figure 4.

e. $I = \int_C \vec{E} \cdot d\vec{M}$ où C est l'ellipse d'équation $(x-2)^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ et le champ $\vec{E} = \begin{pmatrix} y \\ 1 \end{pmatrix}$.

Réponse : Green-Riemann implique simplement de calculer l'aire d'une ellipse.

f. $I = \iint_D f(x,y) dx dy$ avec D le triangle $A(1; -1)$, $B(1; 1)$, $C(-1; 0)$ et $f(x,y) = x - y^2$ de deux façons.

Réponse : directement on trouve $I = \frac{1}{3}$ et par Green-Riemann à l'envers, en identifiant

$x - y^2$ et $\partial_x E_y - \partial_y E_x$, on trouve $\vec{E} \begin{pmatrix} y^3/3 \\ x^2/2 \end{pmatrix}$ puis $I = I_{A \rightarrow B} + I_{B \rightarrow C} + I_{C \rightarrow A} = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{3}}$.

Voir dossier le fichier 1d sur :

http://lemathoscope.com/LWS_FTP/MathoscopePrepa/

(dossier champs_vecteurs).

2. Résoudre $\vec{\nabla} \Phi = \vec{F}$ dans les cas suivants, puis dans chaque cas, calculer $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{R}$ le long du segment $\overline{C_1} = [OI]$ avec $I = (1, 1, 1)$ puis le long de $\overline{C_2} = (x, x^2, x^3)$ (qui va aussi de O à I).

a. $\vec{F}_1 = (2xyz^3, -x^2z^3 - 2y, 3x^2yz^2)$

b. $\vec{F}_2 = (2xy, x^2 + 2yz, y^2 + 1)$

Réponses :

a. \vec{F}_1 ne dérive pas d'un potentiel ($\frac{\partial F_x}{\partial y} \neq \frac{\partial F_y}{\partial x}$ donc $\text{rot } \vec{F}_1 \neq \vec{0}$).

On trouve $\oint_{C_1} \vec{F}_1 \cdot d\vec{R} = -\frac{1}{3}$ et $\oint_{C_2} \vec{F}_1 \cdot d\vec{R} = -\frac{4}{13}$.

b. \vec{F}_2 dérive de $\phi_2 = x^2y + y^2z + z + k$ et donc $\oint_{C_1} \vec{F}_2 \cdot d\vec{R} = \oint_{C_2} \vec{F}_2 \cdot d\vec{R} = \Phi_2(I) - \Phi_2(O) = 3$.

2.2. Lien circulation-travail

1. Trouver le travail de $\vec{F} = (7y + \sqrt{x^3 + 4}, 9x + 2e^{y^2})$ le long de l'astroïde A définie par :

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a \cos^3 t \\ a \sin^3 t \end{pmatrix}, t \in [0, 2\pi] \right\} = \left\{ x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \right\}.$$

Réponse : On remarque que \vec{F} et $\vec{G} = (7y, 9x)$ ont le même rotationnel (constant égal à 2) donc la même circulation. On a alors $W = \oint_A \vec{G} \cdot d\vec{M}$

$$W_{\vec{F}} = a \int_{t=0}^{2\pi} (-7a \sin^3 t) \times 3 \cos^2 t \sin t + (9a \cos^3 t)(3 \sin^2 t \cos t) dt$$

$$W_{\vec{F}} = a^2 \int_{t=0}^{2\pi} (-21 \cos^2 t \sin^4 t + 27 \cos^4 t \sin^2 t) dt \rightsquigarrow \text{Gamma}$$

Remarque : GREEN-RIEMANN ne marche pas.

2. Trouver le travail de $\vec{F}(2e^{2x} \cos(\pi y), -\pi e^{2x} \sin(\pi y))$:

a. de $(0, 0)$ à $(1, 1)$ le long de $C: x^3(y-1)^2 = 4x^4(x-1)^3$;

b. autour de l'ellipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Puis résoudre l'équa diff $F_x dx + F_y dy = 0$.

Réponse : $\vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}} \Phi$ avec $\Phi(x, y) = e^{2x} \cos(\pi y)$ donc :

a. $W = \Phi(1, 1) - \Phi(0, 0) = -e^2 - 1$;

b. $W = 0$.

Équa diff : $F_x dx + F_y dy = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy = 0 \Leftrightarrow d\Phi = 0 \Leftrightarrow \Phi = C^{\text{ste}}$.

3. Travail de la force $\vec{F} = {}^t(y, x, z)$ sur la courbe $C = \widehat{AB}$, de $A(-1, 2, 5)$ vers $B(1, 0, 1)$, intersection du plan $x+y=1$ avec le parabolôide $z=x^2+y^2$.

Réponse : énoncé redondant car \vec{F} dérive de $\Phi = xy + \frac{z^2}{2}$;

donc $W_{\vec{F}} = \Phi(B) - \Phi(A) = 0,5 - 10,5 = -10$.

4. Travail de la force $\vec{F} = {}^t(-\frac{y}{z} \sin x, \frac{\cos x}{z}, -\frac{y}{z^2} \cos x)$ de $A(0, 2, \frac{\pi}{2})$ vers $B(2, 0, 2\pi)$.

Réponse : \vec{F} dérive de $\Phi = \frac{y}{z} \cos x$ donc $W_{\vec{F}} = \Phi(B) - \Phi(A) = -\frac{4}{\pi}$.

5. Une particule est déplacée de O à $A(a, b, c)$ dans un champ de force $\vec{F} = (x+y, x-z, z-y)$, calculer le travail de \vec{F} .

Réponse : \vec{F} dérive du potentiel $\Phi = \frac{x^2}{2} + xy - yz + \frac{z^2}{2}$ donc le travail est $W = \Phi(A) - \Phi(O)$

On peut vérifier que si l'on prend le chemin \overline{C} ci-dessus alors $W > 0$, cohérent avec le fait que \vec{F} contribue au mouvement.

6. Une particule est déplacée par une force \vec{F} de O à $A(a, b, c)$, montrer que le travail de \vec{F} est indépendant du chemin C , et ce, que \vec{F} soit conservative ou non.

Réponse : vu que c'est \vec{F} qui donne le mouvement, on a $m\vec{a} = \vec{F}$ donc :

$$\oint_C \vec{F} d\vec{R} = m \oint_C \vec{a} d\vec{R} = m \int_{t_0}^{t_A} \vec{a}(\vec{v} dt) = m \left[\frac{1}{2} v^2 \right]_{t_0}^{t_A}$$

7. Montrer que $\vec{F} = (4xy - 3x^2 z^2, 2x^2, -2x^3 z)$ est conservative et trouver le potentiel dont elle dérive. En déduire son travail entre $(1, 1, 0)$ et $(2, -1, 1)$.

Ensuite, résoudre l'équa diff $F_x dx + F_y dy + F_z dz = 0(E)$.

Réponse : $\text{rot } \vec{F} = \vec{0}$ et l'on trouve $\Phi = 2x^2y - x^3z^2$ d'où $W = -18$.

Ensuite, $E \Leftrightarrow \vec{F} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \vec{\text{grad}} \Phi \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \Leftrightarrow d\Phi = 0$ cela signifie que Φ est constante le long du chemin, de la surface où (E) est vérifiée. Si l'on avait $\vec{\text{grad}} \Phi = \text{Cste}$ indépendamment d'un chemin, on aurait alors $\Phi = C^{\text{ste}}$ dans tout l'espace, donc a fortiori (E) serait vérifiée aussi.

8. Une particule va dans le plan de $(0, 0)$ à $(1, 0)$ le long de la courbe $C: y = \alpha x(1 - x)$.

Calculer la valeur de α pour que le travail de $\vec{F}(y^2 + 1, x + y)$ soit minimal.

Réponse : on vérifie que \vec{F} ne dérive pas d'un potentiel.

Ensuite :

$$\begin{aligned} W &= \oint_C \vec{F} d\vec{R} \\ &= \int_{x=0}^1 \begin{pmatrix} y^2 + 1 \\ x + y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha(1 - 2x) \end{pmatrix} dx \\ &= \int_{x=0}^1 \begin{pmatrix} \alpha^2 x^2 (1 - x)^2 + 1 \\ x + \alpha x(1 - x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha(1 - 2x) \end{pmatrix} dx \\ &= \int_{x=0}^1 (\alpha^2 x^2 (1 - x)^2 + 1 + (x + \alpha x(1 - x))\alpha(1 - 2x)) dx \\ &= \int_{x=0}^1 (\alpha^2 (x^2 - 2x^3 + x^4) + 1 + \alpha(x + \alpha x - \alpha x^2 - 2x^2 - 2\alpha x^2 + 2\alpha x^3)) dx \\ &= \int_{x=0}^1 (1 + (\alpha + \alpha^2)x + (-2\alpha - 2\alpha^2)x^2 + \alpha^2 x^4) dx \\ &= 1 + (\alpha + \alpha^2)\frac{1}{2} + (-2\alpha - 2\alpha^2)\frac{1}{3} + \alpha^2\frac{1}{5} \\ &= 1 - \frac{\alpha}{6} + \frac{\alpha^2}{30}, \end{aligned}$$

minimal pour $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{1/6}{2/30} = \frac{5}{2}$ et alors $W = \frac{19}{24}$. Dans tous les cas, le travail de \vec{F} sera donc positif.

9. Une particule est attirée vers O par une force centripète en r^3 . Quel est votre travail si vous déplacez cette particule de O à $A(2, 3)$ le long de du chemin $C: y = x^2$ possédant un coefficient de friction μ ?

Réponse : on pose :

- $\vec{u} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ; \quad \frac{1}{r} \begin{pmatrix} x \\ x^2 \end{pmatrix} = \frac{x}{r} \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$
- $\vec{T} = \frac{1}{v} \vec{v} = \frac{1}{v} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$ avec $v = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + 4x^2} dx$;
- $\vec{N} = \frac{1}{v} \begin{pmatrix} -dy \\ dx \end{pmatrix}$
- Force centripète : $\vec{F}_O = -k r^3 \vec{u} = -k r^2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -k \begin{pmatrix} x(x^2 + y^2) \\ y(x^2 + y^2) \end{pmatrix}$, cette force dérive de $\Phi = -k \left(\frac{x^4}{4} + \frac{y^4}{4} + \frac{1}{2} x^2 y^2 \right)$, donc $W_{\vec{F}_O} = \Phi(A) - \Phi(O) = -100k$.

- Force de friction : $\vec{F}_{\text{fr}} = -\mu (\vec{F}_0/\vec{N}) \vec{T}$. Or :

$$\vec{F}_0/\vec{N} = -kr^2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{v} \begin{pmatrix} -dy \\ dx \end{pmatrix} = -kr^2 \frac{1}{v} (-x dy + y dx)$$

$$\vec{F}_0/\vec{N} = -kr^2 \frac{1}{v} (-2x^2 + x^2) dx = kr^2 \frac{1}{v} x^2 dx$$

$$\text{d'où } \vec{F}_{\text{fr}} = -\mu kr^2 \frac{1}{v^2} x^2 dx \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = -\mu kr^2 \frac{1}{(1+4x^2)} x^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2x \end{pmatrix}.$$

d'où enfin :

$$\begin{aligned} W/\vec{F}_{\text{fr}} &= -\int_{x=0}^2 \mu kr^2 \frac{1}{(1+4x^2)} x^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \\ &= -\mu k \int_{x=0}^2 r^2 \frac{1}{(1+4x^2)} x^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2x \end{pmatrix} dx \\ &= -\mu k \int_{x=0}^2 r^2 x^2 dx \\ &= -\mu k \int_{x=0}^2 (x^4 + x^6) dx. \end{aligned}$$

- On trouve finalement $W = 100k + \frac{864\mu k}{35}$, les deux forces \vec{F}_0 et \vec{F}_{fr} sont en travail résistant, donc le travail du déplaceur est positif.

10. Soit C le chemin $C_1 \cup C_2$ allant de $(1, 0, 0)$ à $(0, 2, 0)$ ci-dessous.

a) On veut la circulation (le travail) de $\vec{F} = (2xz, x^3, -z)$ le long de C .

b) On ferme la boucle par le pointillé bleu, calculer $\oint_{\partial\Delta} \vec{F} \cdot d\vec{R}$.

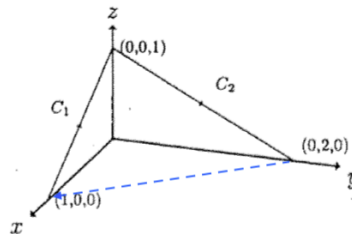


Figure 5.

Réponse :

a) le champ n'est pas du tout conservatif donc il faut faire :

$C_1 = \{(x, 0, z = 1 - x), x \in [1, 0]\}$ et $C_2 = \{(0, y, z = 1 - \frac{y}{2}), y \in [0, 2]\}$ puis :

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{R} &= \int_{x=1}^0 \vec{F} \cdot d \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 1-x \end{pmatrix} + \int_{y=0}^2 \vec{F} \cdot d \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 1-\frac{y}{2} \end{pmatrix} \\ &= \int_{x=1}^0 \vec{F} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ 0 \\ -dx \end{pmatrix} + \int_{y=0}^2 \vec{F} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ dy \\ -\frac{dy}{2} \end{pmatrix} \\ &= \int_{x=1}^0 (2xz + z) dx + \int_{y=0}^2 \left(y^3 + \frac{z}{2} \right) dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{x=1}^0 (2x+1)(1-x) dx + \int_{y=0}^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{y}{4}\right) dy \\
&= \int_{x=1}^0 (-2x^2 + x + 1) dx + 1 - \frac{1}{4} \int_{y=0}^2 y dy \\
&= \left[-2\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_1^0 - 1 + 1 - \frac{1}{4} \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^2 \\
&= \frac{2}{3} - \frac{1}{2} - 1 + 1 - \frac{1}{2} = -\frac{5}{6} + \frac{1}{2} = \boxed{-\frac{1}{3}}
\end{aligned}$$

b) méthode 1 : on nomme $C_3 = \{(x, 2-2x, z=0), x \in [0, 1]\}$ le pointillé bleu et on rajoute :

$$\begin{aligned}
\int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{R} &= \int_{x=0}^1 \vec{F} \cdot d \begin{pmatrix} x \\ 2-2x \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \int_{x=0}^1 \vec{F} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ -2dx \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \int_{x=0}^1 (2xz - 2x^3) dx \\
&= \int_{x=0}^1 -2x^3 dx \\
&= \left[-2\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Donc la circulation totale est $\oint_{\Delta} \vec{F} \cdot d\vec{R} = -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \boxed{-\frac{5}{6}}$.

méthode 2 : on applique Green-Riemann.

On paramètre par $(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ 2v \\ 1-u-v \end{pmatrix}$ où $\begin{cases} u, v \geq 0 \\ u+v \leq 1 \end{cases}$.

La normale est $d\vec{S} = \partial_u \vec{M} \wedge \partial_v \vec{M} = (2, 1, 2)$ et $\text{rot } \vec{F}(x, y, z) = (0, 2x, 3x^2)$

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial\Delta} \vec{F} \cdot d\vec{R} &= \iint_{\Delta} \text{rot } \vec{F}(x, y, z) \cdot d\vec{S} du dv \\
&= \iint_{\substack{u, v \geq 0 \\ u+v \leq 1}} (2x+6x^2) du dv \\
&= 2 \iint_{\substack{u, v \geq 0 \\ u+v \leq 1}} (u+3u^2) du dv \\
&= 2 \int_{v=0}^1 \left(\left[\frac{1}{2}u^2 + u^3 \right]_0^{1-v} \right) dv \\
&= 2 \int_{v=0}^1 \left(\frac{1}{2}(1-v)^2 + (1-v)^3 \right) dv \\
&= \boxed{-\frac{5}{6}}.
\end{aligned}$$

3. FLUX & OSTROGRADSKY

3.1. Exercices

3.1.1. Petits exercices pédagogiques

1. Calculer le flux « montant » de $\vec{E} \begin{pmatrix} xy \\ y+1 \\ y^2 \end{pmatrix}$ à travers le disque $z=1$ et $x^2+y^2 \leq 1$ de deux manières :

- avec un vecteur \vec{N} intuitif et en pensant au jacobien ;
- avec le vecteur \vec{N} donné par le cours.

Réponse :

- Avec $\vec{N}(0,0,1)$ évident, on a $\Phi = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{r=0}^1 \int_{\theta=0}^{2\pi} \vec{E} \cdot \vec{N} r dr d\theta$

$$\text{puis } \Phi = \int_{r=0}^1 \int_{\theta=0}^{2\pi} y^2 r dr d\theta = \int_{r=0}^1 r^3 dr \int_{\theta=0}^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{4}.$$

- Avec $M(r \cos \theta, r \sin \theta, 1)$, on a $\vec{N} = \frac{\partial \vec{M}}{\partial r} \wedge \frac{\partial \vec{M}}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -r \sin \theta \\ r \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$: on retrouve donc le même calcul.

2. Calculer \vec{N} pour $M(x,y,z)$ parcourant une sphère.

Réponse :

$$S = \{M = (x,y,z) / x,y,z \in [0,1] / x^2 + y^2 + z^2 = 1\} = \left\{ M = \left(x, y, \pm \sqrt{1-x^2-y^2} \right), (x,y) \in [-1,1]^2 \right\},$$

$$\text{donc : } \vec{N} = \pm \frac{\partial \vec{M}}{\partial x} \wedge \frac{\partial \vec{M}}{\partial y} = \pm \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -x \\ \pm \sqrt{1-x^2-y^2} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -y \\ \pm \sqrt{1-x^2-y^2} \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} \pm \frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ \pm \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pour comprendre ce \vec{N} trouvé, multiplions-le par $|z| = \sqrt{1-x^2-y^2}$ on obtient $\vec{N}' \begin{pmatrix} \pm x \\ \pm y \\ |z| \end{pmatrix}$,

soit $\vec{N} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{e}_\rho$ sur l'hémisphère nord.

3.

3.1.2. Liens à explorer

[un post sur les-mathematiques.net](http://les-mathematiques.net).

3.1.3. Calculs de flux

1. Flux de $\vec{F} = (-x, -y, z^3)$ à travers le cône tronqué $S: \begin{cases} z = \sqrt{x^2+y^2} \\ 1 \leq z \leq 3 \end{cases}$ orienté vers le bas.

Réponse : S paramétré par $\begin{pmatrix} x=r \cos \theta \\ y=r \sin \theta \\ z=r \end{pmatrix}, \theta \in [0, 2\pi], 1 \leq r \leq 3,$

vecteur normal $\vec{dS} = \pm \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -r \sin \theta \\ r \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} -r \cos \theta \\ -r \sin \theta \\ r \end{pmatrix} = \pm r \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ -1 \end{pmatrix}$ on prend $-$:

$$\begin{aligned} \iint \vec{F} \cdot \vec{dS} &= \iint \vec{F} \cdot \vec{dS} \, dr \, d\theta \\ &= - \iint (x \cos \theta + y \sin \theta + z^3) r \, dr \, d\theta \\ &= -2\pi \int_{r=1}^3 (r^2 + r^4) \, dr \\ &= -2\pi \left(\frac{27-1}{3} + \frac{243-1}{5} \right) = -\frac{1712}{15}\pi \end{aligned}$$

2. \vec{F} un champ de force centrifuge ou centripète en $\frac{1}{r^2}$ (ex : champ de gravité)

Montrer que le flux à travers une sphère de centre 0 est indépendant du rayon.

Réponse : $\vec{F} = c \frac{1}{\rho^2} \mathbf{e}_\rho$ puis $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{dS} = \int_\theta \int_\varphi \frac{c}{\rho^2} \rho^2 \cos \varphi \, d\varphi \, d\theta = c \int_\theta \int_\varphi \cos \varphi \, d\varphi \, d\theta = 4\pi c$

3. Flux de $\vec{F} = (xz, x, y)$ à travers l'hémisphère $H: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 5^2 \\ y \geq 0 \end{cases}$ orienté vers les $y > 0$.

Réponse : S paramétré par $\begin{pmatrix} x = 5 \cos \varphi \cos \theta \\ y = 5 \sin \varphi \\ z = 5 \cos \varphi \sin \theta \end{pmatrix}, \theta \in [0, 2\pi], \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

vecteur normal $\vec{dS} = \pm 25 \begin{pmatrix} -\sin \varphi \cos \theta \\ \cos \varphi \\ -\sin \varphi \sin \theta \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -\cos \varphi \sin \theta \\ 0 \\ \cos \varphi \cos \theta \end{pmatrix} = \pm 25 \cos \varphi \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \\ \cos \varphi \sin \theta \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned} \iint \vec{F} \cdot \vec{dS} &= \iint \begin{pmatrix} xz \\ x \\ y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \\ \cos \varphi \sin \theta \end{pmatrix} r^2 \cos \varphi \, d\varphi \, d\theta \\ &= \iint (25 \cos^3 \varphi \cos^2 \theta \sin \theta + 5 \cos \varphi \sin \varphi \cos \theta + 5 \sin \varphi \cos \varphi \sin \theta) r^2 \cos \varphi \, d\varphi \, d\theta \\ &= \int_\varphi \int_\theta 5^4 \cos^4 \varphi \cos^2 \theta \sin \theta \, d\varphi \, d\theta + \int_\varphi \int_\theta 5^3 \cos^2 \varphi \sin \varphi \cos \theta \, d\varphi \, d\theta \\ &\quad + \int_\varphi \int_\theta 5^3 \sin \varphi \cos^2 \varphi \sin \theta \, d\varphi \, d\theta \\ &= 5^4 \int_\varphi \cos^4 \varphi \, d\varphi \int_\theta \cos^2 \theta \sin \theta \, d\theta + 5^3 \int_\varphi \cos^2 \varphi \sin \varphi \, d\varphi \int_\theta \cos \theta \, d\theta \\ &\quad + 5^3 \int_\varphi \sin \varphi \cos^2 \varphi \, d\varphi \int_\theta \sin \theta \, d\theta \\ &= 0. \end{aligned}$$

4. L'eau de mer a pour densité $\rho = 1025 \text{ kg/m}^3$ et subit un flot $\vec{v} = (y, x, 0)$ (l'unité est le m/s).

Calculer le flux sortant de l'eau à travers l'hémisphère $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 3^2 \\ z \geq 0 \end{cases}$.

Réponse : $S: \begin{pmatrix} x = r \cos \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \cos \varphi \\ z = r \sin \varphi \end{pmatrix}$ avec $r = 3$ donc

$$\vec{n} = \frac{\pm 1}{\|\vec{n}\|} \begin{pmatrix} -r \sin \theta \cos \varphi \\ r \cos \theta \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -r \cos \theta \sin \varphi \\ -r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \varphi \end{pmatrix} = \frac{\pm 1}{\|\vec{n}\|} \begin{pmatrix} r^2 \cos^2 \varphi \cos \theta \\ r^2 \cos^2 \varphi \sin \theta \\ r^2 \sin \varphi \cos \varphi \end{pmatrix} = \frac{\pm 1}{\|\vec{n}\|} \begin{pmatrix} \cos^2 \varphi \cos \theta \\ \cos^2 \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \cos \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta \\ \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S} &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \begin{pmatrix} y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta \\ \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \end{pmatrix} r^2 \cos \varphi d\varphi d\theta \\ \iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S} &= r^2 \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi/2} (y \cos \theta + x \sin \theta) \cos^2 \varphi d\varphi d\theta \\ \iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S} &= r^3 \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \cos^2 \varphi (\sin \theta \cos \theta \cos \varphi + \cos \theta \sin \theta \cos \varphi) d\varphi d\theta \\ \iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S} &= r^3 \int_{\theta=0}^{2\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta \times \int_{\varphi=0}^{\pi/2} 2 \cos^3 \varphi d\varphi = 0.\end{aligned}$$

Ensuite on applique Euler : $\frac{dM}{dt} = \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} = 0$ donc ici l'eau sort autant qu'elle rentre.

3.1.4. Utilisation de Stokes

1. Circulation du champ $\vec{v} = \begin{pmatrix} e^{-x^2-yz} \\ e^{-y^2-xz+2x} \\ e^{-z^2} \end{pmatrix}$ autour de la courbe fermée ∂S constituée par l'intersection :
 - de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 2$;
 - et du paraboloid $z = x^2 + y^2$.

On peut résoudre cet exercice de 6 méthodes différentes.

Réponse : $\boxed{C = 2\pi}$.

- Calcul détaillé (cliquer sur \circ)

2. Calculer le flux « descendant » de $\vec{E} \begin{pmatrix} y \\ z \\ x^2 \end{pmatrix}$ à travers le paraboloid $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq z \\ 0 \leq z \leq 2 \end{cases}$ par plusieurs méthodes.

On trouve $\boxed{\pi}$.

Méthode 1 : $\text{div } \vec{E} = 0$ donc le flux sortant à travers le paraboloid fermé par le plan $z=2$ est nul.

Alors $\Phi_{\downarrow \text{paraboloïde}} = -\Phi_{\uparrow \text{couvercle}}$ et $\Phi_{\uparrow \text{couvercle}} = \int_{r=0}^{\sqrt{2}} \int_{\theta=0}^{2\pi} (\vec{E} \cdot \vec{k}) r dr d\theta = \int_{r=0}^{\sqrt{2}} \int_{\theta=0}^{2\pi} r^3 \cos^2 \theta dr d\theta = \boxed{\pi}$.

Méthode 2 avec Stokes : on trouve $\vec{R}_1 = \begin{pmatrix} R_x = \frac{1}{2}z^2 \\ R_y = \frac{x^3}{3} \\ R_z = \frac{1}{2}y^2 \end{pmatrix}$ et $\vec{R}_2 = \begin{pmatrix} -yx^2 \\ -yz \\ -xz \end{pmatrix}$.

Paramétrons le cercle par $M(\sqrt{2} \cos \theta, \sqrt{2} \sin \theta, 2)$ et alors :

$\Phi_{\uparrow \text{couvercle}} = \int_{\theta=0}^{2\pi} \vec{R}_1 \cdot d\vec{M} = \sqrt{2} \int_{\theta=0}^{2\pi} \left(-\frac{z^2}{2} \sin \theta + \frac{x^3}{3} \cos \theta \right) d\theta = \sqrt{2} \int_{\theta=0}^{2\pi} \left(-2 \sin \theta + \frac{2\sqrt{2}}{3} \cos^4 \theta \right) d\theta = \boxed{\pi}$
car $\cos^4 x = \frac{1}{8}(3 + \cos(4x) + 4 \cos(2x))$.

$\Phi_{\uparrow \text{couvercle}} = \int_{\theta=0}^{2\pi} \vec{R}_2 \cdot d\vec{M} = \sqrt{2} \int_{\theta=0}^{2\pi} (yx^2 \sin \theta - yz \cos \theta) d\theta = 4 \int_{\theta=0}^{2\pi} (\cos^2 \theta \sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta) d\theta = \boxed{\pi}$.

Méthode 3 calcul bourrin : $M \begin{pmatrix} x = \sqrt{z} \cos \theta \\ y = \sqrt{z} \sin \theta \\ z \end{pmatrix}$, $z \in [0, 2]$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

$\vec{N} = \pm \frac{\partial \vec{M}}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \vec{M}}{\partial z} = \pm \begin{pmatrix} -\sqrt{z} \sin \theta \\ \sqrt{z} \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{z}} \cos \theta \\ \frac{1}{2\sqrt{z}} \sin \theta \\ 1 \end{pmatrix}$ on prend $\vec{N} = - \begin{pmatrix} \sqrt{z} \cos \theta \\ \sqrt{z} \sin \theta \\ -1/2 \end{pmatrix}$ donc :

$\Phi = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=0}^2 \vec{E} \cdot \vec{N} dz d\theta = - \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=0}^2 (\sqrt{z} y \cos \theta + \sqrt{z} z \sin \theta - x^2/2) dz d\theta$

$\Phi = - \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=0}^2 \left(z \sin \theta \cos \theta + \sqrt{z} z \sin \theta - \frac{z \cos^2 \theta}{2} \right) dz d\theta = \boxed{\pi}$.

3.1.5. Utilisation d'Odostrogadsky

1. Charge contenue par un cube de sommets $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ dans un champ $\vec{E} = (x, 2y, 3z)$.
Rappel : la charge est ϵ_0 fois le flux sortant de \vec{E} .

Réponse :

$$\begin{aligned}
 \text{charge} &= \epsilon_0 \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \\
 &= \underbrace{\iint_{\substack{|x| \leq 1 \\ |y| \leq 1 \\ z=1}} \begin{pmatrix} x \\ 2y \\ 3z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dx dy}_{12} + \underbrace{\iint_{\substack{|x| \leq 1 \\ |y| \leq 1 \\ z=-1}} \begin{pmatrix} x \\ 2y \\ 3z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} dx dy}_{12} = 24 \\
 &+ \underbrace{\iint_{\substack{|x| \leq 1 \\ |z| \leq 1 \\ y=1}} \begin{pmatrix} x \\ 2y \\ 3z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} dx dy}_{8} + \underbrace{\iint_{\substack{|x| \leq 1 \\ |z| \leq 1 \\ y=-1}} \begin{pmatrix} x \\ 2y \\ 3z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} dx dy}_{8} = 16 \\
 &+ \underbrace{\iint_{\substack{|y| \leq 1 \\ |z| \leq 1 \\ x=1}} \begin{pmatrix} x \\ 2y \\ 3z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dx dy}_{4} + \underbrace{\iint_{\substack{|y| \leq 1 \\ |z| \leq 1 \\ x=-1}} \begin{pmatrix} x \\ 2y \\ 3z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dx dy}_{4} = 8
 \end{aligned}$$

donc la charge est $\boxed{48 \epsilon_0}$.

Ou bien charge = $\epsilon_0 \int_x \int_y \int_z \text{div } \vec{E} dx dy dz = \epsilon_0 \int_x \int_y \int_z 6 dx dy dz = 6 \times 2^3 \epsilon_0 = \boxed{48 \epsilon_0}$

2. Vérifier le théorème de la divergence (=Ostrogradsky) pour $\vec{F} = (x^2, y, z+2)$ et la région $\begin{cases} x^2+y^2 \leq 4 \\ 0 \leq z \leq x^2+y^2 \end{cases}$.

Réponse :

- flux cylindre :

$$\vec{\Phi}_{\text{cylindre}} = \iint_{\substack{\theta \in [0, 2\pi] \\ 0 \leq z \leq 4}} \vec{F} \cdot \vec{e}_r r d\theta dz = \int_{\theta} \int_z \begin{pmatrix} x^2 \\ y \\ z+2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} d\theta dz = \int_{\theta} \int_z (x^3 + y^2) d\theta dz$$

$$\vec{\Phi}_{\text{cylindre}} = \int_{\theta} \int_z (8 \cos^3 \theta + 4 \sin^2 \theta) d\theta dz = 4 \int_{\theta} (8 \cos^3 \theta + 4 \sin^2 \theta) d\theta$$

$$\vec{\Phi}_{\text{cylindre}} = 16\pi.$$

- flux sol :

$$\vec{\Phi}_{\text{cylindre}} = - \iint_{\substack{\theta \in [0, 2\pi] \\ 0 \leq r \leq 2}} \vec{F} \cdot \vec{e}_z r d\theta dr = -2 \int_{\theta} \int_r r d\theta dr = -8\pi.$$

- flux paraboloid

$r^2 = z$ qu'on paramètre par $M(r \cos \theta, r \sin \theta, r^2)$.

$$\text{Donc } \vec{N} = \pm \frac{\partial \vec{M}}{\partial r} \wedge \frac{\partial \vec{M}}{\partial \theta} = \pm \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 2r \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -r \sin \theta \\ r \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2r^2 \cos \theta \\ -2r^2 \sin \theta \\ r \end{pmatrix} \text{ vers le haut.}$$

$$\vec{\Phi}_{\text{paraboloïde}} = \iint_{\substack{\theta \in [0, 2\pi] \\ 0 \leq r \leq 2}} \vec{F} \cdot \vec{N} dr d\theta = \int_{\theta} \int_r \begin{pmatrix} x^2 \\ y \\ z+2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2r^2 \cos \theta \\ -2r^2 \sin \theta \\ r \end{pmatrix} d\theta dr$$

$$\vec{\Phi}_{\text{paraboloïde}} = \int_{\theta} \int_r (-2r^4 \cos^3 \theta - 2r^3 \sin^2 \theta + r^3 + 2r) d\theta dr$$

$$\vec{\Phi}_{\text{paraboloïde}} = \int_r (-2r^3 \pi + 2\pi r^3 + 4\pi r) dr$$

$$\vec{\Phi}_{\text{paraboloïde}} = 8\pi$$

- flux total $\Phi = \boxed{16\pi}$.

- Ostro

$\text{div } \vec{F} = 2x + 2$ donc $I = \iiint (2x + 2) r dr d\theta dz$ pour $\begin{cases} x^2+y^2 \leq 4 \\ 0 \leq z \leq x^2+y^2 \end{cases}$ d'où :

$$I = \int_{\theta} \int_{r=0}^2 (2r \cos \theta + 2) r \left(\int_{z=0}^{r^2} dz \right) d\theta dr = \int_{\theta} \int_{r=0}^2 (2r \cos \theta + 2) r^3 d\theta dr$$

$$I = 4\pi \int_{r=0}^2 r^3 dr = \boxed{16\pi}$$

3. Appliquer Ostrogradsky au flux sortant de $\vec{E}(xy, y+1, y^2)$,

à travers toutes les parois du cylindre $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 \leq z \leq 1. \end{cases}$

Réponse : on trouve $\Phi = \pi$.

- Calculs détaillés (cliquer sur ◦)

$$\Phi = \iint_S \vec{E} \cdot \vec{dS} \text{ avec } \vec{dS} = \vec{N} du dv$$

paroi du haut. $\Phi_{\text{haut}} = \frac{\pi}{4}$.

- Avec $\vec{N}(0, 0, 1)$ évident, on a $\Phi = \iint_S \vec{E} \cdot \vec{dS} = \int_{r=0}^1 \int_{\theta=0}^{2\pi} \vec{E} \cdot \vec{N} r dr d\theta$

$$\text{puis } \Phi = \int_{r=0}^1 \int_{\theta=0}^{2\pi} y^2 r dr d\theta = \int_{r=0}^1 r^3 dr \int_{\theta=0}^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{4}.$$

- Avec $M(r \cos \theta, r \sin \theta, 1)$, on a $\vec{N} = \frac{\partial \vec{M}}{\partial r} \wedge \frac{\partial \vec{M}}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -r \sin \theta \\ r \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}$,
 $\vec{N} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$: on retrouve donc le même calcul.

paroi du bas. $\vec{E} \cdot \vec{N}$ ne dépend pas de z , donc seul le sens de \vec{N} change d'où $\Phi_{\text{bas}} = -\frac{\pi}{4}$.

manteau du cylindre. Manteau du cylindre : $M \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ z \end{pmatrix}, \theta \in [0, 2\pi], z \in [0, 1]$.

$$\vec{dS} = \vec{N} du dv \text{ et } \vec{N} = \frac{\partial \vec{M}}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \vec{M}}{\partial z} = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Phi = \iint_S \vec{E} \cdot \vec{N} d\theta dz = \int_{\theta} \int_z (xy \cos \theta + y \sin \theta + \sin \theta) d\theta dz$$

$$\Phi = \int_z dz \times \int_{\theta} (\cos^2 \theta \sin \theta + \sin^2 \theta + \sin \theta) d\theta$$

$$\Phi = \int_z dz \times \int_{\theta} \sin^2 \theta d\theta = \boxed{\pi}.$$

Flux total. $\Phi_{\text{total}} = \Phi + \Phi_{\text{haut}} + \Phi_{\text{bas}} = \pi$.

Ostrogradsky. $\iint_S \vec{E} \cdot \vec{dS} = \iiint_V \text{div } \vec{E} dV$ avec $\text{div } \vec{E} = y + 1$,

$$\text{donc } \Phi_{\text{total}} = \int_{r=0}^1 \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=0}^1 (y+1) r dr d\theta dz = \int_{r=0}^1 \left(\int_{\theta=0}^{2\pi} (r^2 \sin \theta + r) d\theta \right) dr$$

$$\Phi_{\text{total}} = \int_{r=0}^1 \left(\int_{\theta=0}^{2\pi} r d\theta \right) dr = \boxed{\pi}.$$

4. Idem avec $\vec{E} \begin{pmatrix} xy \\ yz \\ x \end{pmatrix}$ avec le cône $\begin{cases} 0 \leq x \leq 4 \\ y^2 + z^2 \leq (4-x)^2 \end{cases}$.

Réponse : $\Phi = 0$.

- Détail (cliquer sur ◦)

4. CHANGEMENTS DE VARIABLE ATYPIQUES

4.0.1. Coordonnées paraboloidales

On pose :

$$\begin{cases} x = \mu v \cos \varphi \\ y = \mu v \sin \varphi \\ z = \frac{1}{2}(\mu^2 - v^2) \end{cases}$$

Exprimer μ, ν, φ en fonction de x, y, z , puis donner les vecteurs tangents élémentaires et les formules pour longueur d'arc, unité de surface, de volume, et gradient, divergence, laplacien, rotationnel.

Réponse : posons $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ et $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ pour alléger. Alors :

- $$\begin{cases} \mu = \sqrt{\rho + z} \\ \nu = \sqrt{\rho - z} \text{ et l'on a aussi } \mu^2 + \nu^2 = 2\rho \text{ et } \mu\nu = r. \\ \varphi = \arctan \frac{y}{x} \end{cases}$$
 - Détail (cliquer sur ◦)

- Vecteurs tangents élémentaires :

$\frac{\partial}{\partial \mu} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu \cos \varphi \\ \nu \sin \varphi \\ \mu \end{pmatrix} = \vec{e}_\mu$	$\frac{\partial}{\partial \nu} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu \cos \varphi \\ \mu \sin \varphi \\ -\nu \end{pmatrix} = \vec{e}_\nu$	$\frac{\partial}{\partial \varphi} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mu\nu \sin \varphi \\ \mu\nu \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{e}_\varphi$
---	--	--

Ils forment une base orthogonale car $\vec{e}_\mu \times \vec{e}_\nu = \vec{e}_\varphi$.

- Longueur d'arc : $ds = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt \Leftrightarrow ds = \sqrt{(\mu^2 + \nu^2)(\mu'^2 + \nu'^2) + \mu^2 \nu^2 \varphi'^2} dt$
 - détail (cliquer sur ◦)

- Unité de volume : $J = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \mu} & \frac{\partial y}{\partial \mu} & \frac{\partial z}{\partial \mu} \\ \frac{\partial x}{\partial \nu} & \frac{\partial y}{\partial \nu} & \frac{\partial z}{\partial \nu} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \nu \cos \varphi & \nu \sin \varphi & \mu \\ \mu \cos \varphi & \mu \sin \varphi & -\nu \\ -\mu\nu \sin \varphi & \mu\nu \cos \varphi & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow J = \mu\nu(\mu^2 + \nu^2)$
 - détail (cliquer sur ◦)

- Unité de surface

$$\begin{cases} dx = d\mu\nu \cos \varphi + \mu d\nu \cos \varphi - d\varphi \mu\nu \sin \varphi \\ dy = d\mu\nu \sin \varphi + \mu d\nu \sin \varphi + d\varphi \mu\nu \cos \varphi \\ dz = \mu d\mu - \nu d\nu \end{cases} \text{ donc :}$$

$$\begin{cases} dx \wedge dy = (d\mu\nu \cos \varphi + \mu d\nu \cos \varphi - d\varphi \mu\nu \sin \varphi) \wedge (d\mu\nu \sin \varphi + \mu d\nu \sin \varphi + d\varphi \mu\nu \cos \varphi) \\ dy \wedge dz = (d\mu\nu \sin \varphi + \mu d\nu \sin \varphi + d\varphi \mu\nu \cos \varphi) \wedge (\mu d\mu - \nu d\nu) \\ dz \wedge dx = (\mu d\mu - \nu d\nu) \wedge (d\mu\nu \cos \varphi + \mu d\nu \cos \varphi - d\varphi \mu\nu \sin \varphi) \end{cases}$$

$$\begin{cases} dx \wedge dy = \mu\nu^2 (d\mu \wedge d\varphi) + \mu^2 \nu (d\nu \wedge d\varphi) \\ dy \wedge dz = -\sin \varphi (\mu^2 + \nu^2) (d\mu \wedge d\nu) - \mu^2 \nu \cos \varphi (d\mu \wedge d\varphi) + \mu\nu^2 \cos \varphi (d\nu \wedge d\varphi) \\ dz \wedge dx = \cos \varphi (\mu^2 + \nu^2) (d\mu \wedge d\nu) - \mu^2 \nu \sin \varphi (d\mu \wedge d\varphi) + \mu\nu^2 \sin \varphi (d\nu \wedge d\varphi) \end{cases}$$

$$\begin{cases} dx \wedge dy = r\nu (d\mu \wedge d\varphi) + r\mu (d\nu \wedge d\varphi) \\ dy \wedge dz = -2\rho \sin \varphi (d\mu \wedge d\nu) - r\mu \cos \varphi (d\mu \wedge d\varphi) + r\nu \cos \varphi (d\nu \wedge d\varphi) \\ dz \wedge dx = 2\rho \cos \varphi (d\mu \wedge d\nu) - r\mu \sin \varphi (d\mu \wedge d\varphi) + r\nu \sin \varphi (d\nu \wedge d\varphi) \end{cases}$$

- Gradient : posons $m = \frac{\mu}{\mu^2 + \nu^2}$ et $n = \frac{\nu}{\mu^2 + \nu^2}$, on a alors :

$$\vec{V} = (\partial_x, \partial_y, \partial_z) = \begin{pmatrix} \cos \varphi (n\partial_\mu + m\partial_\nu) - \frac{\sin \varphi}{\mu\nu} \partial_\varphi \\ \sin \varphi (n\partial_\mu + m\partial_\nu) + \frac{\sin \varphi}{\mu\nu} \partial_\varphi \\ m \frac{\partial f}{\partial \mu} - n \frac{\partial f}{\partial \nu} \end{pmatrix}$$

- Détail (cliquer sur ◦)