Master Classe du 5 janvier 2022

« VISER LE SOMMET DE LA MONTAGNE… »

niveau : premières spécialité maths

Chapitres réinvestis	Prérequis
• DÉRIVATION. • SECOND DEGRÉ.	• Variations d'une fonction via la dérivée. • Équation de la tangente • Second degré. • Factorisation d'un polynôme par identification.

Énoncé

On dispose :

- d'une courbe $\mathscr{C}_f$, qui est celle de la fonction $f(x) = \frac{x^3}{4} - \frac{3}{2}x^2$;
- d'un point mobile sur $\mathscr{C}_f$ et sa tangente $\mathscr{T}$ à $\mathscr{C}_f$, représentés en deux positions sur le schéma : A et D ;
- du point $B(0,2)$.

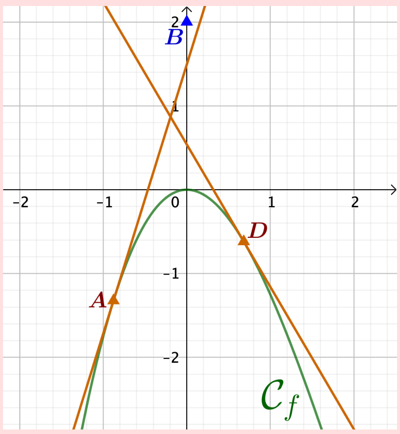


Figure 1. Figure de présentation de l'exercice.

On se demande quelles tangentes passent par le point B.

Questions intermédiaires

1. Donner les variations complètes de f.
2. Soit $m \in \mathbb{R}$, écrire l'équation de la tangente $\mathscr{T}_m$ en m à $\mathscr{C}_f$.
3. Déterminer pour quelles valeurs de m cette tangente passe par B :
   a. par l'analyse ;
   b. par l'algèbre.

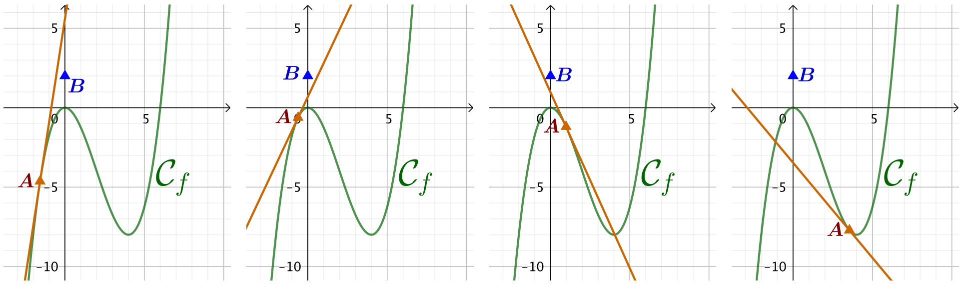
Les solutions

1. On détermine $f'(x) = \frac{3x^2}{4} - 3x = x\left(\frac{3x}{4} - 3\right)$.

   f' est ici une fonction (lacunaire) de degré 2 et l'on sait étudier son signe :

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	0	$\searrow$	-8	$\nearrow$	

   Ce tableau montre que la **Figure 1** devrait être zoomée en arrière :



(1) (2) (3) (4)

Figure 2. Figure dézoomée avec plusieurs tangentes.

Sur cette **Figure 2**, il semblerait (entre (1) et (2)) que la tangente passe par B quelque part pour une abscisse $a \approx -1$, puis une autre fois peut-être vers a environ égal à 2 ou 3 (schéma (3)) et plus du tout ensuite car (à partir de (4) le point d'intersection entre la tangente rouge et l'axe vertical semble descendre vers $-\infty$).

2. On trouve $\mathscr{T}_m : y = f'(m)(x-m) + f(m) = \left(\frac{3m^2}{4} - 3m\right)(x-m) + \frac{m^3}{4} - \frac{3}{2}m^2 (5)$ pour l'équation de la tangente.

   Certes cela paraît un peu compliqué !

   Cependant nous allons bientôt voir que les choses vont se simplifier…

3. On veut $B(0,2) \in \mathscr{T}_m$, cela se produit ssi l'équation (5) est vérifiée en remplaçant (x,y) par $(0,2)$:

$$\begin{aligned} B \in \mathscr{T}_m &\Leftrightarrow \left(\frac{3m^2}{4} - 3m\right)(-m) + \frac{m^3}{4} - \frac{3}{2}m^2 = 2 \\ &\Leftrightarrow -\frac{3m^3}{4} + 3m^2 + \frac{m^3}{4} - \frac{3}{2}m^2 = 2 \\ &\Leftrightarrow -\frac{m^3}{2} + \frac{3}{2}m^2 = 2. \end{aligned}$$

Et là deux méthodes :

a) par l'analyse

- Posons $p(m) = -\frac{m^3}{2} + \frac{3}{2}m^2$: on cherche donc si $p(m)$ peut prendre la valeur 2 pour certaines valeurs de m, autrement dit : on cherche les antécédents de 2 par la fonction p. Pour trouver cela, on constitue le tableau de variations de p.

  On a $p'(m) = 3\left(\frac{-m^2}{2} + m\right)$ nul en $m = 0$ et en $m = 2$ et du signe de a (qui vaut $a = -\frac{3}{2} < 0$) en dehors des racines, et ainsi :

m	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$p'(m)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
p	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

.

- On voit que la chance nous sourit : $m = 2$ est solution. Et une autre solution sera quelque part pour $m \in]-\infty, 0[$.

b) par l'algèbre

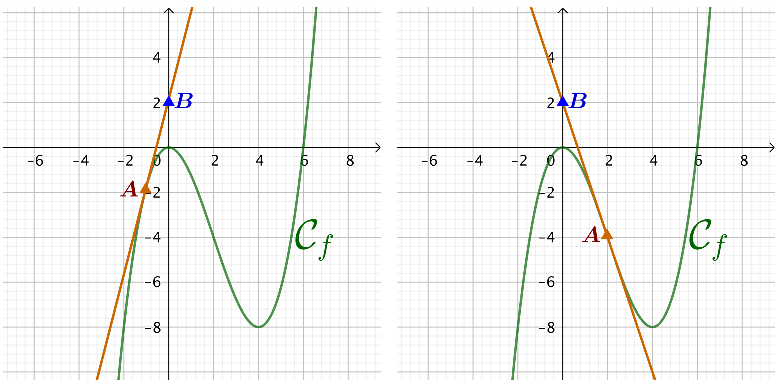
- On doit finalement résoudre l'équation du troisième degré $-\frac{m^3}{2}+\frac{3}{2}m^2-2=0$.
- La seule façon de le faire est d'en trouver une racine évident.
  Essayons avec $m=0$, clairement cela ne marche pas.
  Essayons avec $m=-1$, cela fonctionne !
- À partir de là on pourrait combiner les deux méthodes et conclure. Mais tentons d'aller jusqu'au bout de cette méthode–ci (« avec l'algèbre »).
- On va factoriser le polynôme $-\frac{m^3}{2}+\frac{3}{2}m^2-2$ par $(m+1)$, ce qui nous conduit à :
  $-\frac{m^3}{2}+\frac{3}{2}m^2-2=(m+1)(am^2+ba+c)=am^3+(b+a)m^2+(b+c)m+c$ d'où le système :

$$\begin{cases} a=-\frac{1}{2} \\ b-\frac{1}{2}=\frac{3}{2} \\ b+c=0 \\ c=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\frac{1}{2} \\ b=2 \\ b=2 \\ c=-2 \end{cases}.$$

- Conclusion : l'équation $-\frac{m^3}{2}+\frac{3}{2}m^2-2=0$ est équivalente à l'équation $(m+1)\left(-\frac{1}{2}m^2+2m-2\right)=0$.
- Par le principe des équations-produit, les solutions se trouvent donc en résolvant :

$$\begin{cases} m+1=0 & \rightsquigarrow \text{ on retrouve la solution évidente } m=-1 \\ -\frac{1}{2}m^2+2m-2=0 & \rightsquigarrow \text{ on trouve } \Delta=0 \text{ puis } m=2\text{, ce qui confirme la méthode } \textbf{a)} \end{cases}.$$

Conclusion : la tangente passe par B pour deux abscisses seulement, qui sont $m=-1$ et $m=2$.



$m=-1$ $m=2$

Figure 3. Les deux solutions.